Решение. Поместим начало координат в нейтральном сечении над опорой $A$, направив ось $X$ вправо, а ось $Y$ — вниз. Написав уравнение равновесия для частей $AC$ ($x \leqslant a$) и $CB$ ($x \geqslant a$) и интегрируя их при условиях $y=0$ при $x=0$ и $x=a+b\equiv l$, а также $y=\lambda$ при $x=a$, получим

$$y=\frac{\lambda}{a}x+\frac{F_1x}{6EI}(a^2-x^2)-\frac{Px}{24EIl}(a^3-x^3) \qquad (x\leqslant a),$$

$$y=\frac{\lambda}{b}(l-x)+\frac{F_2(l-x)}{6EI}[b^2-(l-x)^2]-\frac{P(l-x)}{24EIl}[b^3-(l-x)^3] \qquad (x\geqslant a).$$

Далее, надо потребовать, чтобы в точке $C$ у балки не было излома, т. е. чтобы первые производные обоих выражений в точке $x=a$ совпадали. Наконец, надо учесть, что при равновесии сумма всех внешних сил и их моментов, действующих на балку в целом, равны нулю. В результате получим

$$F_1=\frac{3EI}{a^2b}\lambda+\frac{P}{8}\frac{3a^2+ab-b^2}{a(a+b)},$$

$$F_2=\frac{3EI}{ab^2}\lambda+\frac{P}{8}\frac{3b^2+ab-a^2}{b(a+b)},$$

$$F_3=-\frac{3EI(a+b)}{a^2b^2}\lambda+\frac{P}{8}\frac{3ab+a^2+b^2}{ab}.$$

5. Цилиндрический стержень и трубка одинаковой длины и массы, изготовленные из одного и того же материала, лежат своими концами на двух опорах и прогибаются под действием собственного веса. Определить отношение их стрел прогиба $\lambda_1/\lambda_2$, если радиус стержня равен $r$, а наружный радиус трубки $R$.

Ответ. $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}=\dfrac{2R^2-r^2}{r^2}$.

6. Если на две опоры положить концами бумажный лист, то он прогибается и падает под действием собственного веса. Если же лист скатать в сплошной цилиндр или свернуть в трубку, склеив его края, то получившиеся тела ведут себя как твердые. Их можно даже нагружать без заметного прогиба. Вычислив моменты инерции $I_1$, $I_2$, $I_3$ соответствующих поперечных сечений, объяснить явление. Длина листа бумаги (расстояние между опорами) $l$, ширина $a$, толщина $h$.

Ответ. $I_1=\dfrac{1}{12}ah^3, \quad I_2=\dfrac{1}{4\pi}(ah)^2, \quad I_3=\dfrac{1}{8\pi^2}a^3h.$

7. Из круглого бревна диаметра $D$ требуется изготовить балку прямоугольного поперечного сечения, чтобы ее изгиб был минимальным. Определить ширину $a$ и толщину $h$ такой балки.

Ответ. $a=\dfrac{D}{2}, \quad b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}D$. Задача сводится к исследованию экстремума выражения $ab^3$ при дополнительном условии $a^2+b^2=\text{const}$.

## § 81. Скорость распространения продольных упругих возмущений в стержнях

1. Если в каком-либо месте упругой среды возникла деформация, то по прекращении внешних воздействий она не остается на месте, а распространяется в среде во всех направлениях. В таких случаях говорят о распространении в среде *упругих возмущений* или *волн*. Примерами могут служить звуковые волны в твердых телах, жидкостях или газах. Закрепим, например, в горизонтальном положении длинный железный стержень. Если ударить молотком по одному

концу стержня, то на этом конце возникает деформация сжатия, которая начнет распространяться вдоль стержня с большой скоростью. Чтобы обнаружить такую деформацию, наденем на стержень проволочную катушку, концы которой присоединим к осциллографу (рис. 216). Железный стержень всегда намагничен, хотя бы потому, что он находится в магнитном поле Земли. Пока нет возмущения, магнитный поток через катушку остается постоянным, и электрический ток через нее не идет. Но если возмущение достигает той части стержня, на которую надета катушка, то магнитный поток через нее изменяется. Возникает индукционный электрический ток, фиксируемый осциллографом.

Проследить за распространением упругого возмущения вдоль стержня довольно затруднительно из-за большой скорости распространения и малости самого возмущения. Но это легко сделать на

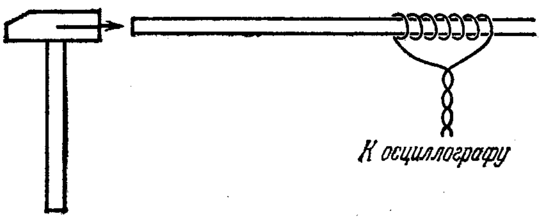


Рис. 216.

модели, взяв вместо стержня длинную спиральную пружину из мягкой проволоки, подвешенную горизонтально на нескольких нитях. Если по одному концу пружины нанести легкий удар, то видно, как деформация сжатия распространяется вдоль пружины. Если же конец пружины был оттянут, то возникнет *деформация растяжения*, также распространяющаяся с определенной скоростью вдоль пружины.

2. Важным является вопрос о *скорости распространения упругих возмущений*. Рассмотрим этот вопрос сначала для упругих возмущений, распространяющихся вдоль стержня. Начнем с модели. Пусть имеется прямолинейный ряд, состоящий из одинаковых твердых идеально упругих шаров, соприкасающихся между собой. Ряд таких шаров неограниченно простирается вправо (рис. 217). Модель не предназначена непосредственно для решения вопроса о скорости распространения упругих возмущений в стержне. Но она позволяет простейшим образом составить представление о распределении скорости движения вещества в стержне, когда в нем распространяется возмущение, возникшее в результате действия определенной силы. Нанеся удар по первому шару, сообщим ему некоторую скорость $v$ (рис. 217, *а*). Первый шар ударится о второй. При

упругом ударе шары просто обмениваются скоростями: первый шар остановится, а второй придет в движение с той же скоростью $v$ (см. § 28). Затем второй шар передаст движение третьему, а сам остановится и т. д. Движение будет передаваться от шара к шару. В результате возникнет возмущение, распространяющееся вдоль ряда шаров. Скорость распространения такого возмущения обозначим $c$. Ее нельзя смешивать со скоростью $v$ того шара, который в рассматриваемый момент движется. Изменим теперь постановку опыта. В тот момент, когда при столкновении со вторым шаром первый шар остановится, нанесем по нему второй удар, чтобы он приобрел прежнюю скорость $v$. Тогда в этот момент первые два шара будут иметь одну и ту же общую скорость $v$. Затем при ударе о третий шар второй шар передаст ему свою скорость, а сам остановится. Первый шар при столкновении со вторым сделает то же самое. В результате движение перейдет от первых двух шаров ко второму и третьему. Затем оно будет передано третьему и четвертому шарам и т. д. Короче говоря, вдоль ряда шаров побежит возмущение, в котором в каждый момент движутся какие-то два шара, соприкасающиеся между собой, а остальные покоятся (рис. 217, *б*). Допустим теперь, что всякий раз, как первый шар передает свое движение второму шару, он получает удар, в результате которого его скорость $v$ восстанавливается. Состояние движения представлено на схематическом рис. 217, *в*. Все шары, расположенные левее некоторой границы, движутся с одной и той же скоростью $v$, а шары, расположенные правее этой границы, находятся в состоянии покоя. Сама граница перемещается вправо со скоростью $c$, так что в движение вовлекаются все новые и новые шары.

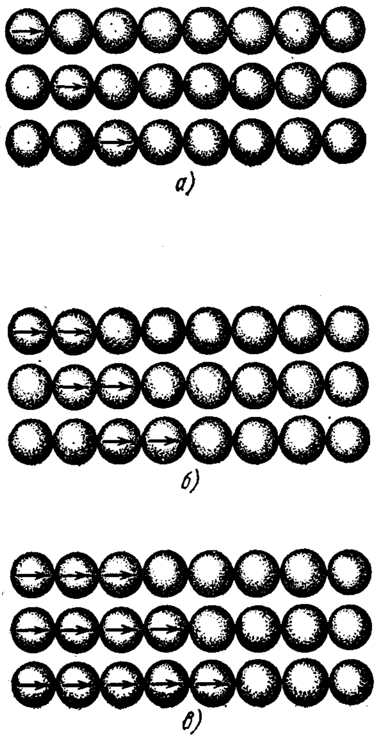


Рис. 217.

Очевидно, ничто не изменится, если вместо шаров взять прямолинейный ряд, состоящий из упругих цилиндриков, соприкасающихся между собой своими основаниями (рис. 218). Это замечание позволяет легко выполнить предельный переход к сплошной среде.

Допустим, что длины цилиндриков неограниченно уменьшаются, а число их неограниченно растет. Вместе с тем удары, которым подвергается первый цилиндрик, становятся все чаще и чаще, а сила каждого удара — все слабее и слабее. В пределе получится сплошной стержень, на свободный конец которого действует постоянная сила $F$ (рис. 219). От реального стержня наша модель отличается тем, что она не оказывает сопротивления на разрыв. Но это несущественно, когда рассматривается вопрос о распространении возмущения сжатия, поскольку сопротивлением на сжатие модель обладает. Можно было бы усовершенствовать модель, введя между цилиндриками пружинки пренебрежимо малой массы, связывающие их между собой. Но при рассмотрении возмущений сжатия в этом нет необходимости. Мгновенное состояние движения стержня, возникшее под действием постоянной силы $F$, может быть охарактеризовано

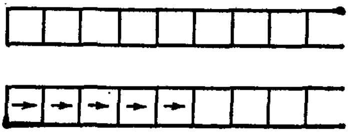

Рис. 218.

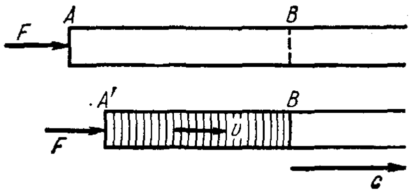


Рис. 219.

следующим образом. Вещество стержня, находящееся левее некоторой границы $B$, движется с постоянной одной и той же скоростью $v$, а вещество правее этой границы находится в покое. Сама граница $B$ перемещается вправо с постоянной скоростью $c$. В акустике, как правило, имеют дело с так называемыми *малыми возмущениями*. В этих случаях скорость вещества $v$ бывает очень мала по сравнению со скоростью распространения возмущения $c$. Нарушение этого условия наблюдается только в случае очень сильных возмущений, называемых *ударными волнами,* которые здесь рассматриваться не будут. Мы ограничимся исследованием распространения только малых возмущений.

**3.** Вычислим скорость распространения *малых продольных возмущений* в стержне, возникших в результате действия постоянной силы давления $F$, приложенной в некоторый момент к его свободному концу (рис. 219). Этот момент в дальнейшем принимается за нулевой, т. е. за начало отсчета времени. В возмущенной области стержня все вещество в любой момент времени $t$ движется с постоянной скоростью $v$, а сам стержень в указанной области всюду деформирован одинаково. Если $m$ — масса деформированной части стержня в момент $t$, то его количество движения в тот же момент будет $mv$. Приращение количества движения стержня за время $dt$, т. е. $d(mv)$

равно импульсу силы $F\,dt$ за то же время. Это дает

$$\frac{d(mv)}{dt}=F\ ^{*}). \tag{81.1}$$

За время $t$ возмущение проходит путь $l=ct$, так что масса возмущенной области стержня будет $m=\rho Sct$, где $S$ — площадь поперечного сечения стержня, а $\rho$ — его плотность. Строго говоря, под $S$ и $\rho$ в этом выражении следовало бы понимать значения этих величин для *невозмущенного стержня*. Однако в пределах принятой здесь точности расчета в соотношениях подобного рода нет необходимости учитывать разницу между значениями $\rho$, $S$ и аналогичных величин в возмущенном и невозмущенном состояниях. Это необходимо делать только при рассмотрении сильных возмущений. Подставив в формулу (81.1) $m=\rho Sct$, $F=PS$, где $P$ — давление в возмущенной области стержня, получим

$$P=\rho cv. \tag{81.2}$$

Давление $P$ связано с относительным сжатием стержня соотношением $P=E\varepsilon$. Для нахождения $\varepsilon$ заметим, что к моменту времени $t$ правый конец сжатой области стержня $B$ еще не успел переместиться, тогда как левый свободный конец его $A'$ двигался в течение времени $t$ и переместился на расстояние $vt$. В результате длина возмущенной области стержня по сравнению со своей исходной длиной укоротится на $\Delta l=vt$. Поэтому

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}=\frac{v}{c}, \tag{81.3}$$

$$P=E\frac{v}{c}. \tag{81.4}$$

Исключая $P$ из формул (81.2) и (81.4), получим

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{81.5}$$

Этой формулой и определяется скорость распространения упругих возмущений в рассматриваемом случае.

**4.** Работа, совершаемая силой $F$ за время $t$, равна $A=Fvt=PS\varepsilon ct=P\varepsilon V$, где $V$ — объем возмущенной части стержня.

---

*) Если раскрыть производную, то получится

$$m\frac{dv}{dt}=F-v\frac{dm}{dt}. \tag{81.1a}$$

Это соотношение является частным случаем уравнения (21,2). Достаточно заметить, что возмущенную часть стержня можно рассматривать как тело с переменной массой, причем $v_{\text{отн}}=-v$. Формулу (81.2), которая выводится ниже, можно получить и из уравнения (81.1a), заметив, что в рассматриваемом случае

$$\frac{dv}{dt}=0, \qquad \frac{dm}{dt}=S\rho c.$$

С другой стороны, потенциальная энергия, запасенная при сжатии, $U = {}^1/_2 P\varepsilon V$. Таким образом, $U = {}^1/_2 A$. Только половина работы идет на увеличение потенциальной энергии стержня. Другая половина тратится на приращение кинетической энергии. *В каждый момент времени кинетическая энергия равна потенциальной.* Этим свойством, как будет показано в следующем параграфе, обладает любое малое возмущение, распространяющееся в *одном направлении*.

**5.** Если в некоторый момент времени сила $F$ прекратит свое действие, то в стержне образуется возмущенная область, ограниченная с обеих сторон. Это нетрудно понять, воспользовавшись прежней моделью из прямолинейного ряда соприкасающихся упругих шаров (рис. 217) и выполнив затем предельный переход к сплошному стержню. Таким же путем нетрудно убедиться, что обе границы возмущенной области должны распространяться в одном направлении и с одной и той же скоростью. Последняя определяется формулой (81.5). Для доказательства достаточно в возмущенной области провести произвольное сечение (рис. 220), все время состоящее из одних и тех же частиц. Очевидно, такое сечение будет двигаться вправо со скоростью вещества $v$. Оно играет роль свободного конца стержня. На него оставшаяся часть деформированного стержня, расположенная левее, давит с силой $F = PS$. Поэтому к части стержня, расположенной правее рассматриваемого сечения, полностью применимо наше прежнее рассуждение. Из него следует, что граница возмущений области $B$ будет распространяться вправо со скоростью $c$, определяемой формулой (81.5).

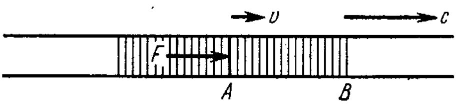

Рис. 220.

**6.** Рассуждение не меняется существенно, если вместо постоянной силы давления к концу стержня приложить в некоторый момент времени постоянную силу натяжения. Разница состоит только в том, что по стержню вместо возмущения сжатия побежит *возмущение разрежения*. Скорость распространения такого возмущения по-прежнему будет определяться формулой (81.5). Модель, состоящая из соприкасающихся упругих шаров, в этом случае, конечно, неприменима. Но ее можно заменить моделью, в которой соприкасающиеся шары связаны между собой бесконечно короткими пружинками пренебрежимо малой массы.

**7.** В предыдущих рассуждениях предполагалось, что возмущение в стержне вызывается *постоянной силой*, приложенной к его концу в какой-то момент времени. Обобщение на случай *переменной силы* не представляет труда. Обратимся к нашей прежней модели, состоящей из ряда упругих шаров, но скрепленных пружинками пренебрежимо малой массы. Если по первому шару наносить удары различной силы в определенные моменты времени, то и сообщаемые ему скорости будут различными. В соответствии с этим распределение скоростей можно представить прежними схематическими рисунками (рис. 217). Однако скорость $v$ будет меняться от шара к шару. Выполнив предельный переход к непрерывному стержню, получим возмущение, распространяющееся в определенном направлении, в котором скорость вещества непрерывно меняется от точки к точке. Может изменяться даже направление скорости $v$, если сила, приложенная к концу стержня, меняет свое направление. Возмущенная область будет ограничена с обеих сторон, если возбуждающая сила действует ограниченное время. Докажем, что для рассматриваемого возмущения остаются справедливыми формулы (81.2) и (81.3), а следовательно, и формула (81.5). На рис. 221 возмущенная область заштрихована и представлена в два бесконечно близких момента времени $t$ и $t + dt$. За время $dt$ возмущенная область пере-

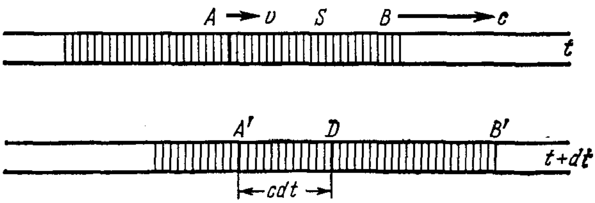


Рис. 221.

мещается на расстояние $c\,dt$. Проведем в возмущенной области, произвольное сечение $A$, состоящее из одних и тех же частиц вещества. Оно перемещается вправо со скоростью $v$, которую имеют частицы вещества в сечении $A$ в момент времени $t$. За время $dt$ частицы переместятся в $A'$, пройдя малое расстояние $v\,dt$, которым мы пренебрегаем. Само возмущение переместится на много большее расстояние $c\,dt$. Найдем приращение количества движения вещества, расположенного правее выделенного сечения $A$. Возмущение из точки $A$ переместится в точку $D$, пройдя расстояние $c\,dt$. Вещество, расположенное правее $D$, в момент $t + dt$ будет обладать в точности таким же движением, каким обладало в момент $t$ вещество, расположенное правее $A$. Поэтому ясно, что искомое приращение количества движения будет равно количеству движения, локализованному между сечениями $A'$ и $D$, т. е. $Sc\,dt\,\rho v$. Оно равно импульсу сил давления $PS\,dt$, действующих в течение времени $dt$ в сечении $A$. Приравнивая оба выражения, получаем формулу (81.2). Так же легко получить формулу (81.3). Рассмотрим бесконечно малую возмущенную область $A'D$ (рис. 221). Ее первоначальная длина была равна $l = c\,dt$. Но возмущение достигло сечения $A'$ на время $dt$ раньше, чем сечения $D$. Благодаря этому путь, пройденный веществом, связанным с сечением $A'$, будет на $v\,dt$ длиннее пути, пройденного веществом, связанным с сечением $D$. Значит, укорочение области $A'D$ в результате деформации равно $\Delta l = v\,dt$. Разделив $\Delta l$ на $l$, получим формулу (81.3).

Плотность кинетической энергии в возмущенной области $w_{\text{кин}} = {}^1/_2 \rho v^2$. Плотность потенциальной энергии $w_{\text{пот}} = {}^1/_2 E\varepsilon^2 = \frac{E}{2}\frac{v^2}{c^2}$. Подставив сюда выражение для $c$ из формулы (81.5), получим $w_{\text{пот}} = {}^1/_2 \rho v^2$. Таким образом, $w_{\text{кин}} = w_{\text{пот}}$. *Во всяком бегущем упругом возмущении, т. е. возмущении, распространяющемся в определенном направлении, полная энергия распределяется поровну между кинетической и потенциальной.*

## § 82. Применения принципа суперпозиции

**1.** Мы пользовались уже *принципом суперпозиции в статике*. Но этому принципу подчиняется также *распространение малых возмущений*. Пусть в среде распространяется какое-либо возмущение. Смещение какой-либо частицы среды из положения равновесия в этом возмущении обозначим $\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{r}_0, t)$. Вектор $\boldsymbol{r}_0$ означает радиус-вектор рассматриваемой точки в состоянии покоя, т. е. до того момента, когда до нее дошло возмущение. Пусть $\boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{r}_0, t)$ — смещение во втором возмущении в той же среде. Какое возмущение возникнет в среде, если в ней возбудить оба эти возмущения? Принцип суперпозиции утверждает, что результирующее смещение будет

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}_0, t) = \boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{r}_0, t) + \boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{r}_0, t).$$

Это означает, что *всякое возмущение, существующее в среде, не влияет на распространение другого возмущения. Каждое возмущение распространяется так, как если бы других возмущений в среде не было.* Примером могут служить волны на поверхности воды. Если на спокойную поверхность пруда бросить два камня, то из точек падения будут распространяться круговые волны. Там, где они накладываются одна на другую, возникает довольно сложное результирующее движение. Но каждая волна после прохождения через область наложения остается в точности такой же, какой она была бы при отсутствии другой волны. Разумеется, принцип суперпозиции справедлив не только для двух, но для произвольного числа возмущений, накладывающихся друг на друга. Принцип суперпозиции в том виде, в каком он сформулирован выше, следовало бы назвать *принципом суперпозиции смещений*. Но он справедлив и для *скоростей частиц*, поскольку скорости получаются дифференцированием смещений по времени. Он верен и для *упругих напряжений*, поскольку последние линейно выражаются через деформации, т. е. смещения. Принцип суперпозиции можно рассматривать как опытный факт. Он является также следствием *линейности уравнений* (относительно смещений), которым описываются малые возмущения. *Для сильных возмущений принцип суперпозиции не справедлив.*