области $A'D$ в результате деформации равно $\Delta l = v\,dt$. Разделив Δl на l, получим формулу (81.3).

Плотность кинетической энергии в возмущенной области $w_{кин} = {}^1/_2 \rho v^2$. Плотность потенциальной энергии $w_{пот} = {}^1/_2 E\varepsilon^2 = \frac{E}{2}\frac{v^2}{c^2}$. Подставив сюда выражение для c из формулы (81.5), получим $w_{пот} = {}^1/_2 \rho v^2$. Таким образом, $w_{кин} = w_{пот}$. *Во всяком бегущем упругом возмущении, т. е. возмущении, распространяющемся в определенном направлении, полная энергия распределяется поровну между кинетической и потенциальной.*

§ 82. Применения принципа суперпозиции

1. Мы пользовались уже *принципом суперпозиции в статике*. Но этому принципу подчиняется также *распространение малых возмущений*. Пусть в среде распространяется какое-либо возмущение. Смещение какой-либо частицы среды из положения равновесия в этом возмущении обозначим $\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{r}_0, t)$. Вектор $\boldsymbol{r}_0$ означает радиус-вектор рассматриваемой точки в состоянии покоя, т. е. до того момента, когда до нее дошло возмущение. Пусть $\boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{r}_0, t)$ — смещение во втором возмущении в той же среде. Какое возмущение возникнет в среде, если в ней возбудить оба эти возмущения? Принцип суперпозиции утверждает, что результирующее смещение будет

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}_0, t) = \boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{r}_0, t) + \boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{r}_0, t).$$

Это означает, что *всякое возмущение, существующее в среде, не влияет на распространение другого возмущения. Каждое возмущение распространяется так, как если бы других возмущений в среде не было.* Примером могут служить волны на поверхности воды. Если на спокойную поверхность пруда бросить два камня, то из точек падения будут распространяться круговые волны. Там, где они накладываются одна на другую, возникает довольно сложное результирующее движение. Но каждая волна после прохождения через область наложения остается в точности такой же, какой она была бы при отсутствии другой волны. Разумеется, принцип суперпозиции справедлив не только для двух, но для произвольного числа возмущений, накладывающихся друг на друга. Принцип суперпозиции в том виде, в каком он сформулирован выше, следовало бы назвать *принципом суперпозиции смещений*. Но он справедлив и для *скоростей частиц*, поскольку скорости получаются дифференцированием смещений по времени. Он верен и для *упругих напряжений*, поскольку последние линейно выражаются через деформации, т. е. смещения. Принцип суперпозиции можно рассматривать как опытный факт. Он является также следствием *линейности уравнений* (относительно смещений), которым описываются малые возмущения. *Для сильных возмущений принцип суперпозиции не справедлив.*

2. В предыдущем параграфе было показано, что полная энергия *бегущего возмущения* распределяется поровну между кинетической и потенциальной. Необходимость такого результата выступает особенно отчетливо, если к вопросу подойти с точки зрения принципа суперпозиции. Для определенности рассмотрим возмущения, распространяющиеся вдоль стержня, хотя наши рассуждения имеют общий характер. Пусть в начальный момент времени некоторая область стержня деформирована, но все вещество внутри этой области находится в покое. Вся начальная энергия стержня будет чисто потенциальной. Обозначим ее E. Если убрать внешние силы, создавшие начальную деформацию, то из возмущенной области вдоль стержня в противоположных направлениях побегут два возмущения. Если первоначальное возмущение было симметрично, то, очевидно, полная энергия E разделится поровну между обоими возмущениями, возникшими из него. Покажем теперь, что в каждом из этих двух бегущих возмущений кинетическая энергия равна потенциальной. Для этого рассмотрим оба возмущения в начальный момент времени, когда они полностью перекрываются. Если P_1 и P_2 — давления, а v_1 и v_2 — скорости вещества в обоих возмущениях, то по принципу суперпозиции в начальный момент $P_1 + P_2 = P$, $v_1 + v_2 = 0$, где P — давление в возмущенной области в тот же момент времени. В силу симметрии $P_1 = P_2 = {}^1/_2 P$. Такое же соотношение между давлением в соответствующих точках сохранится и в каждый последующий момент времени. В частности, оно останется справедливым и тогда, когда оба возмущения разойдутся, т. е. перестанут накладываться друг на друга. Тогда уже имеет смысл говорить о разделении полной энергии между возмущениями, возникшими из начальной возмущенной области. Так как потенциальная энергия пропорциональна квадрату давления, то потенциальная энергия в каждом из бегущих возмущений будет $E/4$, а потенциальная энергия обоих возмущений вместе $E/2$. Для сохранения энергии необходимо, чтобы другая половина полной энергии перешла в кинетическую. Понятно, что и кинетическая энергия распределится поровну между обоими бегущими возмущениями. Таким образом, в каждом бегущем возмущении кинетическая и потенциальная энергии будут одинаковы и равны $E/4$.

3. Приведенное рассуждение, поскольку оно основано на соображениях симметрии, не вызывает возражений, если начальное распределение деформации само обладает требуемой симметрией. Но рассуждение остается применимым и в тех случаях, когда это условие не выполняется. Чтобы убедиться в этом, достаточно мысленно разбить начальную возмущенную область на бесконечно малые области. Внутри каждой из таких бесконечно малых областей давление можно считать постоянным, а его распределение можно изобразить в виде бесконечно узкого прямоугольника. Таким образом, начальное распределение давления в каждой из бесконечно

малых возмущенных областей будет обладать требуемой симметрией. По принципу суперпозиции возмущения, исходящие из каждой бесконечно малой области, совершенно не зависят от того, возмущены или нет другие бесконечно малые области. Поэтому к этим возмущениям полностью применимы рассуждения, приведенные выше. За время t возмущения из рассматриваемой бесконечно малой области распространятся на расстояние ct. Если возмущения, возникшие из всей возмущенной области, в момент t уже не перекрываются, то не будут перекрываться и возмущения, возникшие из отдельных бесконечно малых возмущенных областей (рис. 222). Для них остается справедливым соотношение $P_1 = P_2 = {}^1/_2 P$. Отсюда следует, что *в каждом из бегущих возмущений, возникших из возмущенной области, равны не только полные кинетические и потенциальные энергии, но и их плотности.*

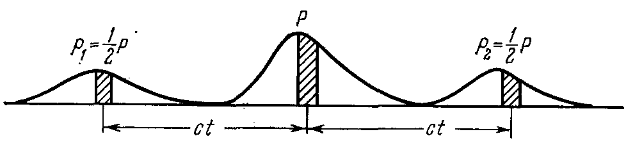

Рис. 222.

4. В приведенном рассуждении предполагалось, что оба бегущих возмущения возникли из начальной деформированной области, находившейся в *состоянии покоя.* Те же рассуждения, понятно, можно было бы провести и для возмущений, возникающих из недеформированных областей, частицам которых в начальный момент времени сообщены скорости, произвольным образом распределенные по этим областям.

5. Итак, *для того чтобы возмущение было бегущим, необходимо, чтобы плотности кинетической и потенциальной энергий в нем были одинаковы.* Вопрос о том, в какую сторону будет распространяться возмущение, легко решается с помощью энергетических соображений. Пусть, например, возмущенная область AB распространяется вправо (рис. 221). Проведем в ней произвольное сечение S. Чтобы возмущение распространялось вправо, необходимо, чтобы часть стержня AS совершала *положительную работу* над частью SB, т. е. должно быть $Pv > 0$, если условиться считать скорости частиц стержня положительными, когда они направлены вправо. Если $v > 0$, то должно быть $P > 0$, т. е. напряжение в сечении S должно иметь *характер давления.* Если же $v < 0$, то должно быть $P < 0$, т. е. напряжение в сечении S должно сводиться к *натяжению* $T = -P$. Чтобы возмущение распространялось влево, необходимо выполнение условия $Pv < 0$.

Если равенство кинетической и потенциальной энергий в возмущении не имеет места, то возмущение разделится на *два возмущения,* распространяющиеся в противоположных направлениях. В общем случае эти возмущения будут уносить разные энергии. Например, если всюду в начальной возмущенной области $Pv > 0$, то энергия, уносимая вправо, будет больше энергии, уходящей влево. При $Pv < 0$ соотношение между этими энергиями будет обратным. Если же $Pv = 0$, то оба возмущения унесут одинаковые энергии.

6. Из изложенного следует, что в бегущей волне сжатия частицы стержня движутся в *том же направлении,* в каком распространяется само возмущение. Если же возмущение носит характер растяжения, то эти направления *противоположны.* Предположим сначала, что возмущение является сжатием и распространяется вдоль стержня слева направо. Исследуем, что произойдет, когда оно достигнет правого конца стержня. Будем предполагать, что правый конец стержня свободен, т. е. не закреплен. Тогда с приходом возмущения

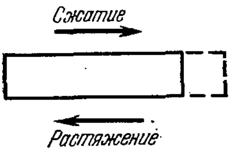

Рис. 223.

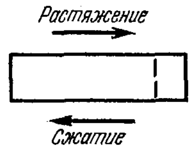

Рис. 224.

частицы на конце стержня приобретут скорости, направленные вправо. Так как конец стержня свободен, то остановиться эти частицы могут лишь тогда, когда со стороны стержня на них подействуют силы, направленные влево. А для этого стержень у правого конца должен оказаться растянутым. Сжатие на конце стержня переходит *в растяжение.* Последнее вызовет в стержне возмущение растяжения, которое будет распространяться в нем влево (рис. 223). Все происходит так, как если бы в некоторый момент времени был оттянут свободный конец стержня и в нем создана деформация растяжения. В возмущении, распространяющемся налево, поскольку оно является возмущением растяжения, частицы среды должны иметь скорости, направленные вправо. Эти скорости частицы приобретают под влиянием сил натяжения, с которыми на них действуют растянутые части стержня, лежащие правее. Мы видим, что *от свободного конца стержня возмущение сжатия отражается и переходит в возмущение растяжения. Аналогично ведет себя и возмущение растяжения. Оно также отражается от свободного конца и переходит в возмущение сжатия* (рис. 224). В обоих случаях при отражении от свободного конца стержня знак деформации меняется на противоположный, тогда как знак скорости вещества v сохраняется неизменным.

Иначе ведет себя возмущение при отражении от закрепленного конца стержня. В общем случае возмущение распадается на два:

одно возвращается назад в виде отраженного возмущения, другое проходит в среду, с которой граничит закрепленный конец стержня. Только в предельном случае, когда эта среда бесконечно жесткая, возмущение отражается целиком. Рассмотрим этот предельный случай. Когда возмущение достигает границы, то сжатие (растяжение) продолжает оставаться сжатием (растяжением), так как конец стержня закреплен и смещаться не может. Но силы, действующие на этот конец со стороны среды, с которой он граничит, меняют направление скоростей частиц на противоположные. Знаки деформаций при отражении сохраняются, а знаки скоростей изменяются. В результате возмущение сжатия отражается также в виде возмущения сжатия, а возмущение растяжения — в виде возмущения растяжения.

ЗАДАЧИ

1. В упругом стержне создана такая начальная деформация сжатия, что скорости всех частиц в деформированной области направлены в одну сторону (например, вправо), причем в каждой точке плотность потенциальной энергии в α раз превосходит плотность кинетической энергии. Определить, какая доля первоначальной энергии будет унесена возмущением, распространяющимся вправо, а какая доля — возмущением, распространяющимся влево.

Решение. Для простоты введем такие единицы, чтобы плотности кинетической и потенциальной энергий выражались формулами $w_{\text{кин}} = v^2$, $w_{\text{пот}} = P^2$. Представим начальные значения P и v в виде

$$P = P_1 + P_2, \qquad v = v_1 + v_2.$$

Пусть каждое из начальных возмущений P_1, v_1 и P_2, v_2 порождает возмущение, бегущее в одном направлении. Тогда $P_1^2 = v_1^2$, $P_2^2 = v_2^2$. Если первое возмущение бежит вправо, а второе — влево, то $P_1 v_1 > 0$, $P_2 v_2 < 0$. Учитывая это, получаем

$$P_1 = v_1, \qquad P_2 = -v_2$$

и далее

$$P_1 = v_1 = \frac{P+v}{2}, \qquad P_2 = -v_2 = \frac{P-v}{2}.$$

Отношение энергий, уносимых возмущениями, равно

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{P+v}{P-v}\right)^2 = \frac{1 + 2\dfrac{P}{v} + \left(\dfrac{P}{v}\right)^2}{1 - 2\dfrac{P}{v} + \left(\dfrac{P}{v}\right)^2}$$

или

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha}{1 - 2\sqrt{\alpha} + \alpha} = \left(\frac{\sqrt{\alpha} + 1}{\sqrt{\alpha} - 1}\right)^2.$$

2. Стальной цилиндр длиной $l = 10$ см, движущийся вдоль своей оси со скоростью v, сталкивается торцом с таким же неподвижным цилиндром, ось которого является продолжением оси первого цилиндра. Рассматривая упругие возмущения, возбуждаемые при ударе, определить время соударения цилиндров. При каких значениях скорости v наступают пластические деформации цилиндров или их разрушение? Для стали $E = 2 \cdot 10^{12}$ дин/см², $\rho = 7{,}8$ г/см³, предел упругости $P_0 = 2 \cdot 10^9$ дин/см².

Решение. В момент соприкосновения цилиндр A движется со скоростью v, цилиндр B — покоится, оба цилиндра не деформированы (рис. 225, положение 1). После того как произойдет удар, от места удара в обе стороны побегут волны сжатия со скоростью c относительно цилиндров (положение 2). Частицы обоих цилиндров в области сжатия движутся в одну и ту же сторону со скоростью $v/2$. Это следует из закона сохранения импульса. Когда возмущения дойдут до концов цилиндров, все вещество будет двигаться с общей скоростью $v/2$ (положение 3). Масса движущегося вещества удвоилась, скорость уменьшилась вдвое, так что закон сохранения импульса соблюдается. Кинетическая энергия по сравнению с начальной уменьшилась вдвое. Половина энергии перешла в потенциальную — оба цилиндра равномерно сжаты и прижимаются друг к другу. Затем начинается отражение возмущений от свободных концов цилиндров (положение 4). Возмущения сжатия переходят в возмущения разрежения. При этом на левом конце давление со стороны смежных областей останавливает частицы вещества, а на правом — ускоряет. Слева возникает недеформированная область, в которой вещество покоится, справа — недеформированная область, в которой вещество движется вправо со скоростью v. Чтобы убедиться в этом, перейдем в систему отсчета, движущуюся вправо со скоростью $v/2$. В начальный момент (положение 3) оба цилиндра в этой системе отсчета покоятся и равномерно сжаты. При отражении на обоих концах возникают возмущения разрежения: от левого конца разрежение пойдет вправо со скоростью c, от правого — влево с той же скоростью. У свободных концов стержней образуются недеформированные области. Скорости вещества в этих областях (относительно движущейся системы отсчета) должны быть направлены наружу, так как движение в них возникает под действием сил сжатия, направленных в те же стороны. В силу симметрии скорости вещества в обеих недеформированных областях одинаковы по величине, но направлены противоположно. Обозначим v' скорость вещества в правой недеформированной области. (Очевидно, она положительна.) Тогда скорость вещества в левой недеформированной области будет $-v'$. Чтобы найти v', перейдем снова в неподвижную систему отсчета. Относительно этой системы скорости вещества в недеформированных областях будут $v/2 - v'$ и $v/2 + v'$. Когда возмущения встретятся в месте соприкосновения цилиндров, деформации исчезнут, и оба цилиндра будут двигаться как целые со скоростями $v/2 - v'$ и $v/2 + v'$. Кинетическая энергия этого движения будет

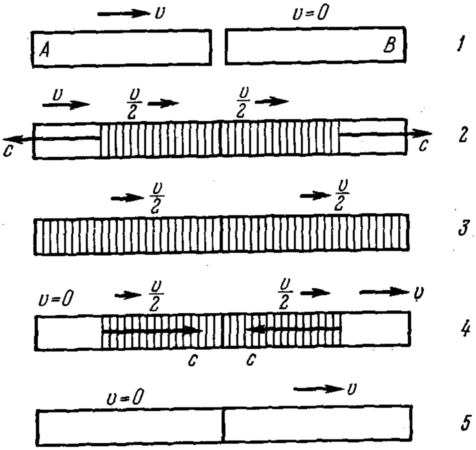

Рис. 225.

$$\frac{m}{2}\left(\frac{v}{2}-v'\right)^2+\frac{m}{2}\left(\frac{v}{2}+v'\right)^2=\frac{mv^2}{4}+mv'^2.$$

Но эта величина должна быть равна $mv^2/2$. Отсюда следует, что $v'^2 = v^2/4$, а потому $v' = v/2$. Таким образом, когда обе волны разрежения сойдутся в центре, первый цилиндр остановится и деформирован не будет, второй будет двигаться вправо со скоростью v также в недеформированном состоянии (положение 5). Как и следовало ожидать, цилиндры обменялись скоростями. Начиная с этого момента, контакт между цилиндрами прекратится. Поэтому время соударения цилиндров найдется как промежуток времени, затрачиваемый на прохождение возмущения по одному из цилиндров (любого) туда и обратно

$$\tau_{\text{уд}} = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{E}} \approx 4 \cdot 10^{-5}\ \text{с}.$$

Найдем теперь относительное сжатие цилиндров при деформации. После соприкосновения левый конец цилиндра B приобрел скорость $v/2$, правый конец продолжал покоиться в течение времени $^1/_2\tau_{\text{уд}}$. За это время левый конец переместился на расстояние $x = {}^1/_4\,\tau_{\text{уд}}\,v$. Относительное сжатие цилиндра будет

$$\frac{x}{l} = \frac{v}{2c},$$

а давление $P = E\,\dfrac{v}{2c}$. Чтобы не возникало пластических деформаций или разрушений, должно быть $P < P_0$, т. е.

$$v < \frac{2cP_0}{E} = \frac{2P_0}{\sqrt{E\rho}} \approx 10\ \text{м/с}.$$

§ 83. Скорости распространения продольных и поперечных возмущений в неограниченной среде

1. Возмущения в стержне, рассмотренные в § 81, мы назвали продольными. Это не совсем точно. Каждая деформация сжатия стержня сопровождается увеличением поперечных размеров его. В случае деформации растяжения поперечные размеры стержня сокращаются. Для количественного описания этих явлений был введен коэффициент Пуассона. Следовательно, частицы в стержне движутся не совсем параллельно его оси: наряду с продольной составляющей скорости они имеют и *поперечную составляющую*. Чтобы сделать возмущение чисто *продольным*, надо лишить частицы стержня возможности перемещаться в поперечных направлениях, т. е. «закрепить» боковую поверхность стержня. Такой случай осуществляется в неограниченной среде при распространении в ней продольных возмущений. Если в такой среде мысленно вырезать произвольный «стержень» с осью, параллельной направлению распространения возмущения (которое в случае продольных возмущений параллельно смещениям частиц), то частицы, находящиеся на боковой поверхности его, удерживаемые соседними частями среды, не будут претерпевать никаких боковых смещений. Все смещения будут происходить только параллельно оси «стержня». Рассуждения, проведенные в предыдущих параграфах, применимы и в рассматриваемом случае. Надо только модуль Юнга E заменить *модулем одностороннего растяжения* E'. В результате для скорости распространения продольных возмущений в неограниченной среде получится выражение

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} \qquad (83.1)$$