цилиндров найдется как промежуток времени, затрачиваемый на прохождение возмущения по одному из цилиндров (любого) туда и обратно

$$\tau_{\text{уд}} = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{E}} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

Найдем теперь относительное сжатие цилиндров при деформации. После соприкосновения левый конец цилиндра B приобрел скорость $v/2$, правый конец продолжал покоиться в течение времени $^1/_2\tau_{\text{уд}}$. За это время левый конец переместился на расстояние $x = {}^1/_4\,\tau_{\text{уд}}\,v$. Относительное сжатие цилиндра будет

$$\frac{x}{l} = \frac{v}{2c},$$

а давление $P = E\,\dfrac{v}{2c}$. Чтобы не возникало пластических деформаций или разрушений, должно быть $P < P_0$, т. е.

$$v < \frac{2cP_0}{E} = \frac{2P_0}{\sqrt{E\rho}} \approx 10 \text{ м/с}.$$

§ 83. Скорости распространения продольных и поперечных возмущений в неограниченной среде

1. Возмущения в стержне, рассмотренные в § 81, мы назвали продольными. Это не совсем точно. Каждая деформация сжатия стержня сопровождается увеличением поперечных размеров его. В случае деформации растяжения поперечные размеры стержня сокращаются. Для количественного описания этих явлений был введен коэффициент Пуассона. Следовательно, частицы в стержне движутся не совсем параллельно его оси: наряду с продольной составляющей скорости они имеют и *поперечную составляющую*. Чтобы сделать возмущение чисто *продольным*, надо лишить частицы стержня возможности перемещаться в поперечных направлениях, т. е. «закрепить» боковую поверхность стержня. Такой случай осуществляется в неограниченной среде при распространении в ней продольных возмущений. Если в такой среде мысленно вырезать произвольный «стержень» с осью, параллельной направлению распространения возмущения (которое в случае продольных возмущений параллельно смещениям частиц), то частицы, находящиеся на боковой поверхности его, удерживаемые соседними частями среды, не будут претерпевать никаких боковых смещений. Все смещения будут происходить только параллельно оси «стержня». Рассуждения, проведенные в предыдущих параграфах, применимы и в рассматриваемом случае. Надо только модуль Юнга E заменить *модулем одностороннего растяжения* E'. В результате для скорости распространения продольных возмущений в неограниченной среде получится выражение

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} \qquad (83.1)$$

или в силу соотношений (77.9) и (78.5)

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{K+{}^4/_3G}{\rho}}. \qquad (83.2)$$

2. В неограниченной твердой среде, наряду с продольными, могут распространяться также *поперечные возмущения.* Так называются возмущения, в которых частицы среды смещаются *перпендикулярно* к направлению распространения возмущения. Скорость распространения поперечных возмущений может быть найдена совершенно так же, как и соответствующая скорость для продольных возмущений. Для этого в среде мысленно вырежем произвольный «стержень», ось которого параллельна направлению распространения возмущения, т. е. перпендикулярна к направлениям смещения частиц (рис. 226). Если к основанию такого «стержня» в начальный момент времени приложить постоянное касательное напряжение τ, то в стержне возникнет *деформация сдвига,* распространяющаяся со скоростью, которую мы обозначим $c_{\perp}$.

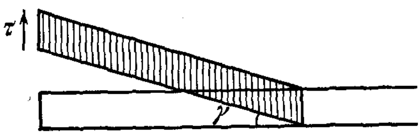

Рис. 226.

Рассуждая так же, как и в § 81, найдем, что касательное напряжение τ связано с $c_{\perp}$ и скоростью частиц стержня v соотношением

$$\tau = \rho c_{\perp} v. \qquad (83.3)$$

Здесь $\tau = G\gamma$, где γ — угол сдвига. Последний легко найти из следующих соображений. За время t свободный конец стержня перемещается на расстояние vt, в то время как само возмущение проходит путь $c_{\perp}t$. Поскольку $v \ll c_{\perp}$, отсюда следует

$$\gamma = \frac{v}{c_{\perp}}. \qquad (83.4)$$

Из этих соотношений легко получить

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \qquad (83.5)$$

3. Поперечные возмущения, если они малы, подчиняются принципу суперпозиции. Поэтому в поперечном возмущении, распространяющемся в определенном направлении, плотности кинетической и потенциальной энергий одинаковы. Вопрос о направлении распространения поперечного возмущения решается с помощью энергетических соображений совершенно так же, как и для продольных возмущений.

4. Так как $K > 0$, то из формул (83.2) и (83.5) следует

$$c_{\parallel} > c_{\perp}. \qquad (83.6)$$

Поэтому если в неограниченной среде возникло какое-либо возмущение, то, вообще говоря, оно разделится на продольное и поперечное, причем продольное возмущение придет в точку наблюдения быстрее поперечного. Необходимость такого разделения непосредственно следует из принципа суперпозиции малых возмущений, согласно которому продольное и поперечное возмущения должны распространяться *независимо друг от друга.*

В качестве примера вычислим скорости распространения упругих возмущений в железе или стали. Из опытов найдено $E = 21{,}2 \cdot 10^{10}$ Н/м², $G = 8{,}2 \times 10^{10}$ Н/м², $\mu = 0{,}29$, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м³. Используя эти данные, получим

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5{,}2 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$c_{\parallel} = c\sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} = 6 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3{,}4 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что скорость распространения крутильных колебаний вдоль стержня совпадает со скоростью поперечных возмущений $c_{\perp}$.

Решение. Для общности будем считать, что стержень представляет собой цилиндрическую трубку с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2. Пусть к основанию трубки приложены постоянные касательные напряжения, создающие вращающий момент M относительно ее геометрической оси. В трубке возникнет деформация кручения, скорость распространения которой обозначим c. В возмущенной области вещество будет вращаться с постоянной угловой скоростью ω. Если момент M действовал в течение времени t, то, очевидно,

$$Mt = I\omega,$$

где I — момент инерции возмущенной области. С другой стороны, $M = f\varphi = f\omega t$. Это дает $ft^2 = I$. Подставляя сюда $I = {}^1/_2\, \pi\rho l\,(r_2^4 - r_1^4)$, $t = l/c$ (l — длина возмущенной области) и пользуясь соотношением (79.4), получим

$$\rho c^2 = G.$$

2. Найти выражение для скорости продольных звуковых возмущений, распространяющихся в безграничной двумерной тонкой пластинке. Показать, что эта скорость меньше, чем скорость продольных возмущений в неограниченной среде (см. задачу к § 77).

Ответ. $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\mu^2)}}$.

§ 84. Скорость распространения поперечных возмущений в натянутом шнуре

1. Возможность распространения поперечных возмущений в твердых телах обусловлена присущей им поперечной упругостью, т. е. способностью тел сопротивляться всякому изменению формы, происходящему без изменения объема. Поперечная упругость может