ГЛАВА XI

# МЕТОДЫ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

* *

## § 86. Размерность и системы единиц

**1.** До сих пор мы ничего не говорили о *размерности физических величин*. Мы пользовались этим понятием, предполагая, что читатель имеет некоторое представление об относящихся сюда вопросах. В задачах, которые мы рассматривали, этого было достаточно. *Метод размерности* весьма эффективен в более сложных вопросах, например в гидродинамике, где полная теоретическая трактовка затруднительна. С привлечением добавочных соображений весьма общего характера или опытных данных он приводит, и притом быстро и просто, к важным результатам, дающим предварительную, хотя и неполную, ориентировку в рассматриваемом круге явлений. Поэтому необходимо познакомиться с этим методом.

Понятие размерности возникает в связи с построением *систем единиц*. В принципе можно было бы (так и поступали раньше) для каждой физической величины установить свою единицу, никак не связанную с единицами других величин. Но тогда в уравнения, выражающие физические законы, вошло бы множество численных коэффициентов. Их значения не укладывались бы ни в какую простую и легко запоминаемую схему, а определялись бы случайным выбором единиц. Такое множество численных коэффициентов весьма сильно усложняло бы формулы. Запоминание их было бы нелегкой и в сущности бесполезной нагрузкой для памяти. Во избежание этого в физике уже давно отказались от независимого выбора единиц для всех физических величин, а стали применять системы единиц, построенные по определенному принципу.

**2.** Принцип этот заключается в следующем. Некоторые физические величины условно принимаются за *основные* или *первичные*, т. е. такие, для которых единицы устанавливаются произвольно и независимо. Так, например, в механике применяется система $LMT$, в которой за основные величины принимаются длина ($L$), масса ($M$) и время ($T$). *Выбор основных величин и их число произвольны.* Это — вопрос соглашения. Например, в технической механике до недавнего времени применялась система $LFT$. Основными величинами в ней были длина ($L$), сила ($F$) и время ($T$). В так называемой *международной системе единиц* (сокращенно СИ) за основные приняты шесть величин: длина, масса, время, температура, сила электрического тока и сила света. Величины, не являющиеся основными, называются *производными* или *вторичными*. Для них единицы устанавливаются из требования, чтобы численные коэффициенты, входящие в физические законы или формулы, служащие определением рассматриваемых величин, принимали определенные, заранее выбранные значения. Например, скорость равномерно движущейся материальной точки есть величина особого рода, пропорциональная пройденному пути $s$ и обратно пропорциональная времени $t$, затрачиваемому на прохождение этого пути. При независимом выборе единиц для $s$, $t$ и $v$ следует писать $v = C\,s/t$, где $C$ — численный коэффициент, значение которого определяется выбором единиц. Если фиксировать значение этого коэффициента, то единицы для $s$, $t$ и $v$ перестанут быть независимыми. Для простоты полагают $C = 1$ и пишут $v = s/t$. Если за основные величины принять путь $s$ и время $t$, то скорость $v$ становится величиной производной. За единицу скорости мы обязаны принять скорость такого равномерного движения, когда за единицу времени проходится единица длины. Говорят, что скорость имеет размерность длины, деленной на время. Символически это записывается так: $[v] = LT^{-1}$. Аналогично пока единицы выбираются независимо, для ускорения $a$ можно написать $a = C\frac{dv}{dt}$. Полагая $C = 1$, мы делаем ускорение $a$ величиной производной, имеющей размерность скорости, деленной на время, или размерность длины, деленной на квадрат времени. После этого за единицу ускорения мы обязаны принять ускорение такого равномерно ускоренного движения, когда за каждую единицу времени скорость возрастает на единицу. В произвольных единицах второй закон Ньютона пишется в виде $F = Cma$. Фиксируя численный коэффициент $C$, мы делаем силу $F$ величиной производной и устанавливаем для нее единицу. Например, при $C = 1$ получаем $F = ma$. После этого сила получает размерность массы, умноженной на ускорение: $[F] = [ma] = MLT^{-2}$. Формула $F = ma$ обязывает нас за единицу силы принять такую силу, которая массе в одну единицу сообщает ускорение, равное единице.

**3.** Размерность физической величины еще не определяет, как велика ее единица. Она устанавливает только связь между единицами различных физических величин. *Размерность дает правило, позволяющее определить, как меняется единица производной физической величины при изменении масштабов основных величин.* Это правило, выраженное в виде математической формулы, называется *формулой размерности*. Допустим, например, что за единицу длины принят километр, а за единицу времени — минута. Единицей ускорения в такой системе единиц будет км/мин$^2$. Спрашивается, как изменится единица ускорения, если за единицу длины принять сантиметр, а за единицу времени — секунду. Формула размерности позволяет быстро ответить на этот вопрос. Мы пишем прежде всего 1 км = $10^5$ см, 1 мин = 60 с и далее

$$1\ \text{км/мин}^2 = \frac{10^5\ \text{см}}{60^2\ \text{с}^2} = \frac{1000}{36}\ \text{см/с}^2.$$

Отсюда видно, что единица ускорения 1 км/мин$^2$ крупнее единицы см/с$^2$ в 1000/36 раз. В соответствии с этим численное значение ускорения, измеренное в км/мин$^2$, окажется меньше численного значения того же ускорения в 1000/36 раз, если его измерить в см/с$^2$.

## § 87. Формула размерности

**1.** Термин «система единиц» употребляется в двух смыслах. В широком смысле система единиц характеризуется выбором основных величин и формулами, определяющими производные величины через основные, причем *масштабы основных величин не фиксируются.* Примером может служить система $LMT$, в которой основными величинами являются длина, масса и время. Другим примером является электротехническая система $LMTI$, в которой за основные величины принимаются длина, масса, время и сила электрического тока $I$. Система единиц в узком смысле дополнительно характеризуется также *определенным выбором масштабов основных единиц*. Примерами могут служить системы СГС и МКСА. Первая есть частный случай системы $LMT$, когда за единицы длины, массы и времени приняты сантиметр, грамм и секунда. Вторая является частным случаем электротехнической системы $LMTI$. В ней единицами длины, массы, времени и силы тока являются соответственно метр, килограмм, секунда и ампер. В теории размерности термин «система единиц» понимается в широком смысле.

Понятие размерности возникает в связи с требованием, чтобы в одной и той же системе единиц количественные соотношения между различными физическими величинами выражались *одними и теми же* формулами, независимо от того, как велики единицы основных физических величин. Этим требованием определяется общий вид *«формул размерности»* физических величин. Допустим, что имеется несколько физических величин, связанных между собой. Для простоты можно ограничиться случаем двух величин, одна из которых принимается за основную, а другая — за производную. Численные значения их $x$ и $y$ связаны уравнением $y = f(x)$. Определим общий вид функции $f(x)$. Если единицу основной величины $x$ уменьшить в $\alpha$ раз, то численное значение этой величины увеличится в такое число раз и сделается равным $X = \alpha x$. При этом единица производной величины $y$ уменьшится, а ее численное значение увеличится в $\beta$ раз и станет равным $Y = \beta y$. Мы требуем, чтобы численные значения $X$ и $Y$ были связаны тем же уравнением, что и числа $x$ и $y$, т. е. $Y = f(X)$ или $\beta y = f(\alpha x)$. Этому условию можно удовлетворить при любых значениях $\alpha$, если надлежащим образом подобрать $\beta$.