позволяет быстро ответить на этот вопрос. Мы пишем прежде всего 1 км = 10^5 см, 1 мин = 60 с и далее

$$1\ \text{км/мин}^2 = \frac{10^5\ \text{см}}{60^2\ \text{с}^2} = \frac{1000}{36}\ \text{см/с}^2.$$

Отсюда видно, что единица ускорения 1 км/мин^2 крупнее единицы см/с^2 в 1000/36 раз. В соответствии с этим численное значение ускорения, измеренное в км/мин^2, окажется меньше численного значения того же ускорения в 1000/36 раз, если его измерить в см/с^2.

§ 87. Формула размерности

1. Термин «система единиц» употребляется в двух смыслах. В широком смысле система единиц характеризуется выбором основных величин и формулами, определяющими производные величины через основные, причем *масштабы основных величин не фиксируются*. Примером может служить система LMT, в которой основными величинами являются длина, масса и время. Другим примером является электротехническая система $LMTI$, в которой за основные величины принимаются длина, масса, время и сила электрического тока I. Система единиц в узком смысле дополнительно характеризуется также *определенным выбором масштабов основных единиц*. Примерами могут служить системы СГС и МКСА. Первая есть частный случай системы LMT, когда за единицы длины, массы и времени приняты сантиметр, грамм и секунда. Вторая является частным случаем электротехнической системы $LMTI$. В ней единицами длины, массы, времени и силы тока являются соответственно метр, килограмм, секунда и ампер. В теории размерности термин «система единиц» понимается в широком смысле.

Понятие размерности возникает в связи с требованием, чтобы в одной и той же системе единиц количественные соотношения между различными физическими величинами выражались *одними и теми же* формулами, независимо от того, как велики единицы основных физических величин. Этим требованием определяется общий вид *«формул размерности»* физических величин. Допустим, что имеется несколько физических величин, связанных между собой. Для простоты можно ограничиться случаем двух величин, одна из которых принимается за основную, а другая — за производную. Численные значения их x и y связаны уравнением $y = f(x)$. Определим общий вид функции $f(x)$. Если единицу основной величины x уменьшить в α раз, то численное значение этой величины увеличится в такое число раз и сделается равным $X = \alpha x$. При этом единица производной величины y уменьшится, а ее численное значение увеличится в β раз и станет равным $Y = \beta y$. Мы требуем, чтобы численные значения X и Y были связаны тем же уравнением, что и числа x и y, т. е. $Y = f(X)$ или $\beta y = f(\alpha x)$. Этому условию можно удовлетворить при любых значениях α, если надлежащим образом подобрать β.

Задача сводится к нахождению β как функции аргумента α. На этот вопрос и отвечает «формула размерности».

Прежде чем его решать, изменим постановку вопроса. Пусть две физические величины связаны соотношением $y = f(x)$. Будем менять сами физические величины, оставляя их единицы неизменными. Допустим, что величины x и y увеличились соответственно в α и β раз и сделались равными $X = \alpha x$ и $Y = \beta y$. Спрашивается, какому условию должны удовлетворять числа α и β, чтобы связь между новыми значениями физических величин X и Y была та же, что и между старыми значениями x и y, т. е. $Y = f(X)$. На этот вопрос отвечает *теория подобия*. Вопрос опять сводится к исследованию уравнения $\beta y = f(\alpha x)$. Мы видим, что теории размерности и подобия отличаются друг от друга только формой постановки вопроса. По существу они не отличаются одна от другой. Теория подобия позволяет исследовать количественные соотношения между различными параметрами реальных физических систем на их уменьшенных или увеличенных моделях. Так поступают, например, в авиационной технике, помещая в аэродинамические трубы уменьшенные копии реальных летательных аппаратов. Изучив поведение моделей реальных систем, можно с помощью теории подобия или размерности сделать выводы о поведении самих систем в реальных условиях. Теория размерности сводит вопрос о подобии физических явлений в указанном выше смысле к *анализу размерностей* физических величин.

2. После этих предварительных замечаний установим общий вид формулы размерности. Как разъяснено выше, мы должны требовать, чтобы из уравнения $y = f(x)$ вытекало уравнение $Y = f(X)$, где $X = \alpha x$, $Y = \beta y$. Аргумент x и параметр α могут независимо принимать любые значения. Задача состоит в том, чтобы по заданному значению α найти значение β. Путем дифференцирования при фиксированных α и β находим

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \qquad \frac{dY}{dX} = f'(X).$$

Вторую из этих формул запишем в виде

$$\frac{\beta}{\alpha}\frac{dy}{dx} = f'(X).$$

Поделим ее почленно на первую и в результате α и β заменим выражениями $\alpha = \frac{X}{x}$, $\beta = \frac{Y}{y} = \frac{f(X)}{f(x)}$. Тогда получим

$$x\frac{f'(x)}{f(x)} = X\frac{f'(X)}{f(X)}.$$

Слева стоит функция только x, справа — та же функция только X. Обозначив ее F, имеем $F(x) = F(X)$. Но в силу произвольности параметра α аргументы x и $X = \alpha x$ могут независимо принимать любые значения. Поэтому равенство $F(x) = F(X)$ должно выполняться тождественно, каковы бы ни были x и X. Это значит, что $F(x)$ есть постоянная. Обозначив эту постоянную m, получим дифференциальное уравнение

$$x\frac{f'(x)}{f(x)} = m,$$

или

$$\frac{df(x)}{f(x)} = m\frac{dx}{x}.$$

Отсюда находим

$$f(x) = f_0 x^m,$$

где f_0 — постоянная интегрирования. Таким образом, $y = f_0 x^m$. Аналогично $Y = f_0 X^m$ или $\beta y = f_0(\alpha x)^m$. Исключая почленным делением x и y, находим

$$\beta = \alpha^m. \tag{87.1}$$

Это и есть формула размерности. Мы видим, что требование независимости функциональной связи между y и x от выбора масштаба единицы основной физической величины x может быть удовлетворено только тогда, когда размерность выражается формулой *степенного вида*.

Приведенные рассуждения без труда обобщаются на случай, когда рассматриваемая физическая величина зависит от нескольких основных физических величин. Для этого в рассуждениях надо только фиксировать единицы всех основных физических величин, за исключением одной из них. Таким путем нетрудно показать, что формула размерности должна быть *степенного вида относительно всех основных физических величин*. Допустим, например, что число основных величин выбрано равным трем, и за них приняты длина (L), масса (M) и время (T). Тогда размерность любой физической величины y представится формулой

$$[y] = L^p M^q T^r, \tag{87.2}$$

где p, q, r — постоянные числа. Формула (87.2) означает, что если единицы длины, массы и времени уменьшить соответственно в α, β и γ раз, то единица производной величины y уменьшится в $\alpha^p\beta^q\gamma^r$ раз, а следовательно, ее численное значение увеличится в такое же число раз.

3. Если посмотреть на размерности физических величин, фактически встречающихся в физике, то нетрудно заметить, что во всех случаях числа p, q, r оказываются рациональными. Это не обязательно с точки зрения теории размерности, а является результатом соответствующих определений физических величин. Так, например, скорость вводится по формуле $v = s/t$ и поэтому имеет размерность длины, деленной на время. Для нее $p = 1$, $q = 0$, $r = -1$. Но в принципе теория размерности допускает введение величин с иррациональными значениями p, q, r, например величины $(1/t)s^{\sqrt{2}}$. Для такой величины было бы $p = \sqrt{2}$. Подобные величины не вводятся в физику не по каким-то принципиальным соображениям, а просто потому, что в них нет надобности. Теория размерности здесь ни при чем.

4. Часто размерность физической величины отождествляют с ее единицей в соответствующей системе единиц. Так, например, говорят, что скорость имеет размерность см/с, а сила — г·см/с^2. Хотя это и нелогично, но особой беды в этом нет. Всегда, если есть необходимость, единицы такого типа позволяют перейти к формулам размерности, в которых масштабы единиц основных величин не фиксированы.

5. В зависимости от выбора основных величин, а также от вида формул, связывающих эти величины с производными, одна и та же физическая величина получает в разных системах единиц не только различные численные значения, но и различные размерности. Так, например, в системе LMT размерность силы устанавливается из второго закона Ньютона $f = Cma$, в котором коэффициент C условно считается безразмерным и полагается равным единице. Тогда сила получает размерность LMT^{-2}. Но так поступать не обязательно. Можно коэффициенту C приписать произвольную размерность и придать произвольное численное значение. Тогда получится новая система единиц, в которой сила будет иметь уже другую размерность. Например (и так иногда делают), в уравнении $f = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, выражающем закон всемирного тяготения Ньютона, приравнивают гравитационную постоянную G единице и считают эту величину безразмерной. Тогда сила f получает размерность M^2L^{-2}, а во втором законе Ньютона $f = Cma$ появляется коэффициент C с размерностью $ML^{-3}T^2$.

Разные физические величины могут иметь одинаковые размерности даже в одной и той же системе единиц. Примерами могут служить в механике работа и кинетическая энергия или работа и момент сил (система MLT), а в учении об электричестве и магнетизме — емкость и индуктивность, имеющие в так называемой гауссовой системе единиц размерность длины. В таких случаях и единицам этих физических величин часто дают одинаковые наименования, хотя по существу это совершенно разные вещи. Одинаковая размерность двух различных физических величин в какой-либо системе единиц говорит не об их тождестве, а только о том, что в рассматриваемой системе масштабы единиц этих величин меняются одинаково при изменении масштабов единиц основных физических величин. В других системах единиц размерности тех же физических величин могут и не совпадать.

Несовпадение размерностей одной и той же величины в разных системах единиц иногда истолковывают как некоторое логическое противоречие, требующее объяснения. Оно подало повод к постановке вопроса об «истинной» размерности физических величин. На основании изложенного нет никакой необходимости доказывать, что физической величине самой по себе не свойственна никакая размерность. Последняя появляется лишь после установления той или иной системы единиц, а вопрос об «истинной» размерности физических величин, по меткому замечанию Макса Планка, имеет не более смысла, чем вопрос об «истинном» названии какого-либо предмета.

6. *Безразмерными комбинациями физических величин* называются такие комбинации, которые в рассматриваемой системе единиц имеют нулевую размерность. Их численные значения не меняются при изменении масштабов единиц основных величин. Легко привести примеры таких комбинаций. Если величина y имеет размерность величины x в степени α, то, очевидно, y/x^α будет безразмерной комбинацией, составленной из x и y.

Общий метод нахождения безразмерных комбинаций можно разъяснить на примере системы единиц, построенной на основе трех величин: длины (L), массы (M) и времени (T). Пусть n величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в этой системе имеют размерности соответственно

$$L^{p_1}M^{q_1}T^{r_1},\ L^{p_2}M^{q_2}T^{r_2},\ \ldots,\ L^{p_n}M^{q_n}T^{r_n}.$$

Требуется составить из них безразмерную комбинацию. На основании теоремы, доказанной в п. 2, искомая комбинация должна иметь вид $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Ее размерность будет

$$(L^{p_1}M^{q_1}T^{r_1})^{\alpha_1}(L^{p_2}M^{q_2}T^{r_2})^{\alpha_2}\ldots(L^{p_n}M^{q_n}T^{r_n})^{\alpha_n},$$

т. е. $L^pM^qT^r$, где

$$\begin{aligned} p &= p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n, \\ q &= q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \ldots + q_n\alpha_n, \\ r &= r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_n\alpha_n. \end{aligned} \tag{87.3}$$

Для того чтобы комбинация была безразмерной, необходимо и достаточно, чтобы $p = q = r = 0$. Это приводит к системе трех однородных уравнений

$$\begin{aligned} p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n &= 0, \\ q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \ldots + q_n\alpha_n &= 0, \\ r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_n\alpha_n &= 0 \end{aligned} \tag{87.4}$$

с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Одно из этих неизвестных всегда можно выбрать произвольно, так как безразмерная комбинация останется безразмерной, если ее возвести в произвольную степень. Фиксируем, например, α_1. Тогда получится три уравнения для определения $n - 1$ неизвестных, за которые удобно принять отношения $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$. Если эти уравнения независимы, то $(n-1)-3 = n-4$ отношений можно выбрать произвольно. Три остальные определятся из уравнений (87.4). В результате найдутся $n - 4$ независимых безразмерных комбинаций. Всякая функция этих безразмерных комбинаций будет также безразмерной комбинацией. Если же три уравнения (87.4) не независимы, то число независимых безразмерных комбинаций увеличится. Например, если в системе (87.4) независимы только два уравнения, то независимых безразмерных комбинаций будет $n - 3$ и т. д.

§ 88. Правило размерности

1. Все применения теории размерностей основаны на двух теоремах. Одна из них выражается формулой (87.2), устанавливающей общий вид размерности физических величин. Другая теорема утверждает, что всякое количественное соотношение между различными физическими величинами может быть выражено в виде функциональной связи между *безразмерными комбинациями этих величин.*

Для доказательства предположим, что между величинами a, b, c, x_1, x_2, x_3, ... имеется функциональная связь $f(a, b, c, x_1, x_2, x_3, \ldots) = 0$. Примем величины a, b, c за основные, а остальные величины x_1, x_2, x_3, ... — за производные. (Мы взяли число основных величин равным трем, но это несущественно.) Пусть размерности производных величин будут $[x_1] = [a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}]$, $[x_2] = [a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}]$, ... Уменьшим единицы основных величин в α, β, γ раз соответственно. Тогда они примут значения αa, βb, γc, а производные величины — значения $\alpha^{p_1}\beta^{q_1}\gamma^{r_1}x_1$, $\alpha^{p_2}\beta^{q_2}\gamma^{r_2}x_2$, ... Рассматриваемая функциональная связь запишется в виде

$$f(\alpha a, \beta b, \gamma c, \alpha^{p_1}\beta^{q_1}\gamma^{r_1}x_1, \alpha^{p_2}\beta^{q_2}\gamma^{r_2}x_2, \ldots) = 0,$$

причем α, β, γ можно выбрать произвольно. Выберем их так, чтобы $\alpha a = \beta b = \gamma c = 1$. Это означает переход от жестко фиксированных единиц к меняющейся системе единиц, в которой численные значения основных физических величин в рассматриваемом вопросе принимаются равными единице. При таком выборе

$$f\left(1, 1, 1, \frac{x_1}{a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}}, \frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}}, \ldots\right) = 0.$$

Но это уравнение в качестве переменных аргументов содержит только безразмерные комбинации физических величин. Его можно записать в виде

$$F\left(\frac{x_1}{a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}}, \frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}}, \ldots\right) = 0, \qquad (88.1)$$

где F — новая функция. Теорема доказана.