получится три уравнения для определения $n-1$ неизвестных, за которые удобно принять отношения $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$. Если эти уравнения независимы, то $(n-1)-3=n-4$ отношений можно выбрать произвольно. Три остальные определятся из уравнений (87.4). В результате найдутся $n-4$ независимых безразмерных комбинаций. Всякая функция этих безразмерных комбинаций будет также безразмерной комбинацией. Если же три уравнения (87.4) не независимы, то число независимых безразмерных комбинаций увеличится. Например, если в системе (87.4) независимы только два уравнения, то независимых безразмерных комбинаций будет $n-3$ и т. д.

§ 88. Правило размерности

1. Все применения теории размерностей основаны на двух теоремах. Одна из них выражается формулой (87.2), устанавливающей общий вид размерности физических величин. Другая теорема утверждает, что всякое количественное соотношение между различными физическими величинами может быть выражено в виде функциональной связи между *безразмерными комбинациями этих величин.*

Для доказательства предположим, что между величинами a, b, c, x_1, x_2, x_3, ... имеется функциональная связь $f(a, b, c, x_1, x_2, x_3, \ldots) = 0$. Примем величины a, b, c за основные, а остальные величины x_1, x_2, x_3, ... — за производные. (Мы взяли число основных величин равным трем, но это несущественно.) Пусть размерности производных величин будут $[x_1] = [a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}]$, $[x_2] = [a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}]$, ... Уменьшим единицы основных величин в α, β, γ раз соответственно. Тогда они примут значения αa, βb, γc, а производные величины — значения $\alpha^{p_1}\beta^{q_1}\gamma^{r_1}x_1$, $\alpha^{p_2}\beta^{q_2}\gamma^{r_2}x_2$, ... Рассматриваемая функциональная связь запишется в виде

$$f(\alpha a,\ \beta b,\ \gamma c,\ \alpha^{p_1}\beta^{q_1}\gamma^{r_1}x_1,\ \alpha^{p_2}\beta^{q_2}\gamma^{r_2}x_2,\ \ldots) = 0,$$

причем α, β, γ можно выбрать произвольно. Выберем их так, чтобы $\alpha a = \beta b = \gamma c = 1$. Это означает переход от жестко фиксированных единиц к меняющейся системе единиц, в которой численные значения основных физических величин в рассматриваемом вопросе принимаются равными единице. При таком выборе

$$f\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{x_1}{a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}},\ \frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}},\ \ldots\right) = 0.$$

Но это уравнение в качестве переменных аргументов содержит только безразмерные комбинации физических величин. Его можно записать в виде

$$F\left(\frac{x_1}{a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}},\ \frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}},\ \ldots\right) = 0, \tag{88.1}$$

где F — новая функция. Теорема доказана.

2. Доказанной теореме можно придать другую форму. Разрешим уравнение (88.1) относительно одного из аргументов, например первого, и результат умножим на знаменатель этого аргумента. Получим

$$x_1 = a^{p_1} b^{q_1} c^{r_1} \varphi\left(\frac{x_2}{a^{p_2} b^{q_2} c^{r_2}}, \ldots\right), \tag{88.2}$$

где φ — какая-то функция безразмерных аргументов. Это означает, что во всяком физическом законе типа $A = B$ размерности обеих частей равенства должны быть *одинаковы*. В таком виде доказанная теорема получила название *правила размерностей*. В равенство типа $A = B$ могут входить в качестве множителей либо постоянные коэффициенты, либо безразмерные комбинации физических величин. Над размерными величинами правило размерности допускает выполнение только степенных математических операций. Все прочие математические операции ($\sin x$, e^x, $\ln x$ и т. п.) могут выполняться только над безразмерными величинами. Правило размерности очень полезно для проверки формул. Если вычисления проводятся в какой-то одной системе единиц, то размерности обеих частей всех полученных равенств должны быть одинаковы. Несовпадение размерностей указывает на наличие ошибки, допущенной при вычислениях.

Из доказанного отнюдь не следует, что невозможны физические законы, выражающиеся в виде равенств между величинами разной размерности. Равенства подобного рода встречаются в физике сплошь и рядом. Например, скорость свободного падения можно выразить приближенной формулой $v = 10t$ (если начальная скорость равна нулю), а гидростатическое давление слоя воды — формулой $P = 1/10h$. Однако подобные формулы справедливы только тогда, когда *точно фиксированы* единицы входящих в них физических величин. В приведенных примерах предполагается, что время t измеряется в секундах, скорость v — в метрах в секунду, толщина слоя воды h — в метрах, давление P — в атмосферах. Изменения масштабов единиц такие формулы не допускают. Но в таком случае нет смысла говорить и о размерности входящих в них физических величин.

3. Теория размерности сама по себе, т. е. без использования добавочных данных, не может привести ни к каким конкретным физическим выводам, поскольку в ее основах не заложены никакие физические законы. Для того чтобы извлечь из этой теории конкретные выводы, нужно установить, *между какими физическими величинами* существуют количественные связи. На этот счет теория размерности не может дать никаких указаний. Это можно сделать только либо опытным путем, либо с помощью каких-то физических законов. Приводимые ниже примеры могут служить иллюстрацией высказанных утверждений.

ЗАДАЧИ

1. Составить все независимые безразмерные комбинации из величин l, m, t, v, a, ρ, E, φ (l — длина, m — масса t — время, v — скорость, a — ускорение, ρ — плотность вещества, E — модуль Юнга, φ — угол, измеренный в радианах).

Решение. Проще всего поступить следующим образом. Из перечисленных величин угол φ уже является безразмерной величиной. Далее замечаем, что vt имеет размерность длины, at — размерность скорости, ρl^3 — размерность массы, ρv^2 — размерность давления, а следовательно, и размерность модуля Юнга. Поэтому сразу можно написать следующие безразмерные комбинации:

$$\frac{vt}{l}, \quad \frac{at}{v}, \quad \frac{\rho l^3}{m}, \quad \frac{\rho v^2}{E}, \quad \varphi. \tag{88.3}$$

Этот способ обладает, однако, тем недостатком, что он не дает ответа на вопрос, исчерпываются ли рядом (88.3) все независимые безразмерные комбинации рассматриваемых физических величин. Общий метод, изложенный в § 87, п. 6, свободен от этого недостатка. Поэтому мы приведем решение также по этому методу. При отыскании безразмерных комбинаций угол φ, как величину безразмерную, можно не принимать во внимание. Из оставшихся семи величин составим комбинацию вида

$$l^\alpha m^\beta t^\gamma v^\delta a^\lambda \rho^\mu E^\nu.$$

Если выразить размерности v, a, ρ, E через размерности основных величин l, m, t, то эта комбинация перейдет в

$$l^\alpha m^\beta t^\gamma l^\delta t^{-\delta} l^\lambda t^{-2\lambda} m^\mu l^{-3\mu} m^\nu l^{-\nu} t^{-2\nu},$$

т. е. в комбинацию

$$l^{\alpha+\delta+\lambda-3\mu-\nu} m^{\beta+\mu+\nu} t^{\gamma-\delta-2\lambda-2\nu}.$$

Для того чтобы эта комбинация была безразмерной, должно быть

$$\begin{aligned} &\alpha+\delta+\lambda-3\mu-\nu=0, \\ &\beta+\mu+\nu \qquad\qquad\;\, =0, \\ &\gamma-\delta-2\lambda-2\nu \quad\;\; =0. \end{aligned}$$

Из этих трех уравнений три неизвестных параметра можно выразить через оставшиеся четыре. За независимые параметры проще всего принять δ, λ, μ, ν, так как уравнения фактически уже разрешены относительно оставшихся неизвестных α, β, γ:

$$\begin{aligned} &\alpha=-\delta-\lambda+3\mu+\nu, \\ &\beta=-\mu-\nu, \\ &\gamma=\delta+2\lambda+2\nu. \end{aligned}$$

Параметры δ, λ, μ, ν могут независимо принимать любые значения. Полагая последовательно

1) $\delta=1, \quad \lambda=\mu=\nu=0,$ 2) $\lambda=1, \quad \delta=\mu=\nu=0,$
3) $\mu=1, \quad \delta=\lambda=\nu=0,$ 4) $\nu=1, \quad \delta=\lambda=\mu=0,$

получим

1) $\alpha=-1, \quad \beta=0, \quad \gamma=1,$ 2) $\alpha=-1, \quad \beta=0, \quad \gamma=2,$
3) $\alpha=3, \quad \beta=-1, \quad \gamma=0,$ 4) $\alpha=1, \quad \beta=-1, \quad \gamma=2.$

Этим значениям соответствуют следующие безразмерные комбинации:

$$1)\ \frac{vt}{l}, \quad 2)\ \frac{at^2}{l}, \quad 3)\ \frac{\rho l^3}{m}, \quad 4)\ \frac{Elt^2}{m}.$$

Присоединив к ним угол φ, получим всего пять независимых безразмерных комбинаций. Все они являются функциями безразмерных комбинаций (88.3). Значит, рядом (88.3) исчерпываются все независимые безразмерные комбинации, которые можно составить из рассматриваемых физических величин.

2. Как зависит от высоты h скорость свободного падения тела, если начальная скорость его равна нулю?

Решение. Ускорение свободного падения g постоянно и не зависит от массы, плотности, упругих свойств тел и пр. Поэтому искомая скорость v может зависеть только от g и h. Из безразмерных комбинаций (88.3) можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию $v^2/(la)$ или $v^2/(gh)$, содержащую только длину, скорость и ускорение. Она получается делением первой безразмерной комбинации ряда (88.3) на вторую. Поэтому должно быть $f\left(\frac{v^2}{gh}\right)=0$, откуда $v^2/(gh) = C = \text{const}$, или $v^2 = Cgh$. Численный коэффициент C из теории размерности найти нельзя.

3. Пользуясь соображениями размерности, найти зависимость периода колебаний T физического маятника от его приведенной длины l, ускорения силы тяжести g и угловой амплитуды α.

Ответ. $T=\varphi(\alpha)\sqrt{l/g}$. Вид функции $\varphi(\alpha)$ из теории размерности определить нельзя. Если эту функцию разложить в ряд Тейлора и сохранить в нем только нулевой член (что можно делать в случае малых колебаний), то получится $T=C\sqrt{l/g}$, , где C — постоянный численный коэффициент, значение которого из теории размерности определить также нельзя. То обстоятельство, что $C \neq 0$, также не вытекает из теории размерности, а должно быть установлено особо (например, опытным путем).

4. Пользуясь соображениями размерности, определить зависимость скорости распространения v продольных упругих возмущений в стержне от модуля Юнга E и плотности материала ρ.

Ответ. $v=C\sqrt{E/\rho}$. Численный коэффициент C из размерных соображений найти нельзя.

5. Две невзаимодействующие материальные точки, находящиеся в центральном силовом поле, описывают геометрически подобные траектории. Сила F, действующая на каждую материальную точку, пропорциональна ее массе и меняется с расстоянием r до силового центра, как r^n, где n — постоянная. Как связаны длины l_1 и l_2 геометрически подобных дуг траекторий с временами T_1 и T_2, затрачиваемыми материальными точками на прохождение этих дуг?

Решение. Должна существовать связь между длиной дуги траектории l, временем T, затрачиваемым материальной точкой на прохождение этой дуги, а также ускорением a, направленным к силовому центру. Ускорения можно брать в произвольных, но обязательно подобно расположенных точках. Из этих трех величин можно составить единственную независимую безразмерную комбинацию, за которую можно принять aT^2/l. Следовательно, должно быть $aT^2/l = \text{const}$. Для ускорения можно написать $a = Ar^n$, где A — постоянная, одинаковая для обеих материальных точек. В силу геометрического подобия траекторий, по которым движутся материальные точки, можно также написать $a = Bl^n$, где B — другая постоянная, также одинаковая для обеих точек. В результате получим $T^2l^{n-1} = \text{const}$, а потому $T_1^2 l_1^{n-1} = T_2^2 l_2^{n-1}$. В частных случаях $n = 1$ и $n = -2$ получаем $T = \text{const}$ и $T^2/l^3 = \text{const}$. Первое соотношение означает, что в случае гармонического осциллятора период колебаний или период обращения вокруг силового центра не зависит от амплитуды или размеров орбиты. Второе соотношение выражает третий закон Кеплера. Однако этот закон доказан здесь не в общем виде, а только для частиц, движущихся по геометрически подобным траекториям.