является главным образом в тонком *пограничном слое* вблизи поверхности тела, где они велики. Они приводят к отрыву течения от тела. При этом вместо области застоя за телом возникает область интенсивного турбулентного движения. Наличие такой области и ведет к возникновению лобового сопротивления. При этом силы вязкости автоматически устраняют неоднозначность в положении линии отрыва, характерную для разрывных течений идеальных жидкостей. Чем у́же область отрыва, тем меньше лобовое сопротивление. С целью уменьшения лобового сопротивления самолетам, судам, автомобилям и прочим быстроходным самодвижущимся аппаратам придают «обтекаемую форму».

§ 101. Применение теории размерности

1. Отвлечемся на время от механизма возникновения силы $\boldsymbol{F}$, с которой стационарный поток несжимаемой жидкости действует на неподвижное тело, и применим к этой проблеме методы теории размерности. Сила $\boldsymbol{F}$ зависит от формы и размеров тела, от ориентации его по отношению к потоку, от скорости потока $\boldsymbol{v}$ (на «бесконечности»), а также от свойств жидкости. Ориентацию крыла самолета принято характеризовать *углом атаки,* т. е. углом между плоскостью крыла и направлением полета. Не будем вводить явно такие параметры, предполагая, что мы имеем дело с телами не только геометрически подобными, но и подобно расположенными. Свойства жидкости характеризуются ее плотностью ρ и коэффициентом вязкости η. Таким образом, должна существовать функциональная связь между величинами $\boldsymbol{F}$, v, ρ, η, S, где S — характерная площадь поперечного сечения тела. Квадратный корень из нее $l=\sqrt{S}$ может служить характерным линейным размером тела. Из этих пяти величин можно составить две независимые безразмерные комбинации. За таковые можно принять $\frac{F}{\rho v^2 S}$ и число Рейнольдса $\mathrm{Re}=\frac{\rho l v}{\eta}$. Согласно правилу размерности одна из этих комбинаций является функцией другой. В результате получим

$$\boldsymbol{F}=\frac{\rho v^2}{2} S\boldsymbol{C}(\mathrm{Re}), \tag{101.1}$$

или

$$F_x=\frac{\rho v^2}{2} SC_x(\mathrm{Re}), \tag{101.2}$$

$$F_y=\frac{\rho v^2}{2} SC_y(\mathrm{Re}). \tag{101.3}$$

Безразмерные коэффициенты $C_x(\mathrm{Re})$ и $C_y(\mathrm{Re})$ называются соответственно коэффициентами *лобового сопротивления* и *подъемной силы.* Оба они являются функциями числа Рейнольдса и зависят от формы тела и его ориентации по отношению к потоку. Теоретическое вычисление этих коэффициентов затруднительно, они обычно определяются опытным путем.

2. При больших числах Рейнольдса лобовое сопротивление F_x обусловлено почти исключительно разностью давлений. Если обтекаемое тело имеет сзади заостренные края, то отрыв течения за телом происходит в одном и том же месте, положение которого не зависит от скорости потока. (Примером может служить пластинка, поставленная перпендикулярно к направлению потока. Отрыв течения происходит на ее краях.) В этих случаях коэффициент лобового сопротивления приблизительно постоянен, а само лобовое сопротивление пропорционально квадрату скорости v. Понять это проще всего, если воспользоваться идеализированной картиной разрывного течения (рис. 265). Действительно, если при всех скоростях отрыв течения происходит в одном и том же месте, то характерная площадь поперечного сечения S не зависит от скорости. С другой стороны, разность давлений перед и за телом по закону Бернулли равна $^1/_2\,\rho v^2$. Отсюда и получается формула (101.2) с постоянным коэффициентом C_x. При больших скоростях v порядка скорости звука и выше коэффициенты C_x и C_y зависят не только от числа Рейнольдса Re, но и от числа Маха M.

3. Рассмотрим теперь случай малых чисел Рейнольдса. В этом случае основной интерес представляет сила лобового сопротивления F_x. Инерция, а с ней и плотность жидкости не играют существенной роли, сила F_x определяется почти исключительно вязкостью. Поэтому плотность ρ должна выпадать из формулы (101.2). Это будет тогда и только тогда, когда коэффициент лобового сопротивления обратно пропорционален числу Рейнольдса, т. е.

$$C_x = \frac{A}{\mathsf{Re}},$$

где A — безразмерная постоянная. Подставляя выражение для Re, получим

$$F_x = A\eta l v. \tag{101.4}$$

Эта формула справедлива при малых числах Рейнольдса ($\mathsf{Re} \ll 1$), так как она выведена в предположении, что влияние инерции жидкости пренебрежимо мало по сравнению с влиянием вязкости. Коэффициент A зависит от формы тела и его ориентации относительно потока. Его теоретическое вычисление довольно кропотливо и требует интегрирования уравнений движения вязкой жидкости. Простейшим является случай шара. Для этого случая Стоксом (1819—1903) было показано, что $A = 6\pi$, если за характерный размер l принять радиус шара a. Таким образом, получается *формула Стокса*

$$F_x = 6\pi\eta a v. \tag{101.5}$$

Так как формула (101.5) получила широкие применения в очень важных физических опытах (определение заряда электрона методом Милликена, броуновское движение и пр.), то имеет смысл более подробно выяснить на конкретных примерах границы ее применимости.

В опытах Милликена (1868—1953) по определению заряда электрона формула Стокса (101.5) применялась к капелькам масла, падавшим в воздухе под действием силы тяжести. Если m — масса капли, то при установившемся равномерном падении вес капли mg должен уравновешиваться силой вязкости $6\pi\eta av$, а потому $mg = 6\pi\eta av$ (архимедовой подъемной силой пренебрегаем). Если ρ_0 — плотность масла, то масса капли $m = \frac{4\pi}{3}a^3\rho_0$. Подставляя это значение, находим сначала скорость капли v, а затем и число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho av}{\eta} = \frac{2}{9}\frac{a^3\rho\rho_0 g}{\eta^2},$$

где ρ — плотность воздуха. Условие применимости формулы Стокса $\mathrm{Re} \ll 1$ дает

$$a^3 \ll \frac{9}{2}\frac{\eta^2}{\rho\rho_0 g}.$$

Подставляя сюда $\eta = 1{,}8\cdot 10^{-4}$ г/(с·см), $\rho = 1{,}29\cdot 10^{-3}$ г/см^3, $\rho_0 = 0{,}9$ г/см^3, найдем, что для применимости формулы Стокса должно выполняться условие $a \ll 0{,}05$ мм. Формулу можно применять для мельчайших капелек тумана. Однако о применении ее к каплям дождя, даже самым мелким, не может быть речи.

В качестве второго примера возьмем капельки ртути, падающие в жидкости под действием собственного веса. По скорости установившегося падения капли можно вычислить вязкость жидкости. Это дает практический метод измерения вязкости. В рассматриваемом случае надо учитывать архимедову выталкивающую силу. Если ρ_0 — плотность ртути, ρ и η — плотность и вязкость исследуемой жидкости, то для применимости формулы Стокса необходимо выполнение условия

$$a^3 \ll \frac{9}{2}\frac{\eta^2}{(\rho_0-\rho)\rho g}.$$

Для воды $\eta = 0{,}010$ г/(с·см), и мы получаем $a \ll 0{,}15$ мм.

§ 102. Потенциальные и вихревые движения

1. Все движения жидкостей подразделяются на *потенциальные* и *вихревые*. Рассмотрим поле скоростей жидкости $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ в какой-то фиксированный момент времени. Возьмем в жидкости произвольный замкнутый контур C и на нем установим положительное направление обхода (рис. 267). Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной, а $d\boldsymbol{s}$ — элемент длины контура, проведенные в положительном направлении. Интеграл

$$\Gamma = \oint_C v_\tau\, ds = \oint_C (\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{s}) \qquad (102.1)$$

называется *циркуляцией вектора скорости* по контуру C. Если циркуляция скорости по любому замкнутому контуру обращается в нуль, то движение жидкости называется потенциальным. В противном случае движение называется *вихревым*.

При этом предполагается, что область пространства, в которой течет жидкость, *односвязна*. Это значит, что любой замкнутый кон-