Так как формула (101.5) получила широкие применения в очень важных физических опытах (определение заряда электрона методом Милликена, броуновское движение и пр.), то имеет смысл более подробно выяснить на конкретных примерах границы ее применимости.

В опытах Милликена (1868—1953) по определению заряда электрона формула Стокса (101.5) применялась к капелькам масла, падавшим в воздухе под действием силы тяжести. Если m — масса капли, то при установившемся равномерном падении вес капли mg должен уравновешиваться силой вязкости $6\pi\eta a v$, а потому $mg = 6\pi\eta a v$ (архимедовой подъемной силой пренебрегаем). Если ρ_0 — плотность масла, то масса капли $m = \frac{4\pi}{3} a^3\rho_0$. Подставляя это значение, находим сначала скорость капли v, а затем и число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho a v}{\eta} = \frac{2}{9}\,\frac{a^3\rho\rho_0 g}{\eta^2},$$

где ρ — плотность воздуха. Условие применимости формулы Стокса $\mathrm{Re} \ll 1$ дает

$$a^3 \ll \frac{9}{2}\,\frac{\eta^2}{\rho\rho_0 g}.$$

Подставляя сюда $\eta = 1{,}8\cdot 10^{-4}$ г/(с·см), $\rho = 1{,}29\cdot 10^{-3}$ г/см³, $\rho_0 = 0{,}9$ г/см³, найдем, что для применимости формулы Стокса должно выполняться условие $a \ll 0{,}05$ мм. Формулу можно применять для мельчайших капелек тумана. Однако о применении ее к каплям дождя, даже самым мелким, не может быть речи.

В качестве второго примера возьмем капельки ртути, падающие в жидкости под действием собственного веса. По скорости установившегося падения капли можно вычислить вязкость жидкости. Это дает практический метод измерения вязкости. В рассматриваемом случае надо учитывать архимедову выталкивающую силу. Если ρ_0 — плотность ртути, ρ и η — плотность и вязкость исследуемой жидкости, то для применимости формулы Стокса необходимо выполнение условия

$$a^3 \ll \frac{9}{2}\,\frac{\eta^2}{(\rho_0 - \rho)\rho g}.$$

Для воды $\eta = 0{,}010$ г/(с·см), и мы получаем $a \ll 0{,}15$ мм.

§ 102. Потенциальные и вихревые движения

1. Все движения жидкостей подразделяются на *потенциальные* и *вихревые*. Рассмотрим поле скоростей жидкости $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ в какой-то фиксированный момент времени. Возьмем в жидкости произвольный замкнутый контур C и на нем установим положительное направление обхода (рис. 267). Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной, а $d\boldsymbol{s}$ — элемент длины контура, проведенные в положительном направлении. Интеграл

$$\Gamma = \oint_C v_\tau\, ds = \oint_C (\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{s}) \qquad (102.1)$$

называется *циркуляцией вектора скорости* по контуру C. Если циркуляция скорости по любому замкнутому контуру обращается в нуль, то движение жидкости называется потенциальным. В противном случае движение называется *вихревым*.

При этом предполагается, что область пространства, в которой течет жидкость, *односвязна*. Это значит, что любой замкнутый контур в такой области непрерывной деформацией может быть стянут в точку, не пересекая при этом обтекаемые тела. Если же область не односвязна (например, жидкость, обтекающая тор), то приведенные определения необходимо дополнить следующими замечаниями. В качестве C следует брать не все контуры, а только произвольные замкнутые контуры, которые непрерывной деформацией могут быть стянуты в точку, не выходя при этом за границы жидкости. Важным случаем может служить так называемое *плоское течение* являющееся идеализацией действительных течений. Пусть обтекаемое тело является бесконечно длинным цилиндром с произвольным поперечным сечением, а жидкость течет перпендикулярно к оси этого цилиндра. Тогда достаточно ограничиться рассмотрением течения в одной из

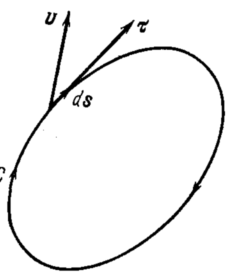

Рис. 267.

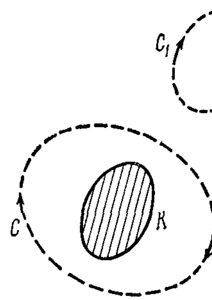

Рис. 268.

плоскостей, перпендикулярных к той же оси. Течение в этой плоскости и называется плоским. Оно будет потенциальным, если циркуляция скорости обращается в нуль по любому замкнутому контуру, *не охватывающему обтекаемый цилиндр*, например по контуру C_1 (рис. 268). Но циркуляция по контуру C, окружающему цилиндр, может и не обращаться в нуль. Нетрудно показать, что при потенциальном течении циркуляция Γ будет одной и той же для всех замкнутых контуров, обходящих вокруг цилиндра один раз. Если $\Gamma \neq 0$, то говорят о *потенциальном течении с циркуляцией.*

2. Определение потенциального течения совершенно аналогично определению консервативных сил (см. § 24). Поэтому при потенциальном течении линейный интеграл $\int\limits_{AB} (\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{s})$, взятый вдоль незамкнутой кривой, соединяющей точки A и B, зависит только от положения крайних точек этой кривой A и B, но не зависит от формы самой кривой AB. Рассуждая так же, как в случае потенциальной энергии, можно ввести функцию координат φ, через которую скорость $\boldsymbol{v}$ выражается формулой

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi \tag{102.2}$$

(см. § 29). Функция φ называется *потенциалом скоростей.*

Примером потенциального течения может служить течение жидкости вдоль параллельных прямых линий с постоянной скоростью. Можно показать, что *всякое течение идеальной жидкости, возникшее из состояния покоя под действием консервативных сил, является потенциальным*.

3. Примером вихревого движения может служить плоское течение жидкости, когда частицы последней вращаются по концентрическим окружностям с одной и той же угловой скоростью ω (рис. 269). Циркуляция скорости по окружности радиуса r в этом случае равна $\Gamma = 2\pi r v = 2\pi r^2 \omega$. Ее отношение к площади контура πr^2 будет $\frac{\Gamma}{\pi r^2} = 2\omega$, т. е. не зависит от радиуса r. Если угловая скорость вращения зависит от радиуса r, то вместо отношения $\Gamma/(\pi r^2)$ берут его предел при $r \to 0$. Ясно, что этот предел равен удвоенному значению угловой скорости, с которой вращаются частицы жидкости вблизи оси O. Этот предел называется *вихрем* или *ротором* скорости $\boldsymbol{v}$, точнее, проекцией ротора на направление, перпендикулярное к плоскости контура. Вообще, для произвольного движения ротор скорости $\boldsymbol{v}$ определяется своими проекциями на произвольное направление следующим образом.

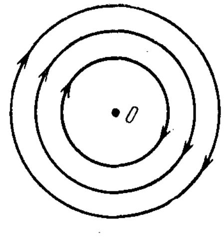

Рис. 269.

Берется произвольный бесконечно малый контур с площадью ΔS и внешней нормалью $\boldsymbol{n}$. Проекция вектора $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ на направление нормали $\boldsymbol{n}$ определяется соотношением

$$\mathrm{rot}_n \boldsymbol{v} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Gamma}{\Delta S}, \qquad (102.3)$$

где Γ — циркуляция вектора $\boldsymbol{v}$ вдоль рассматриваемого контура.

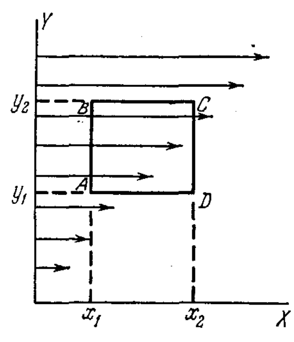

Рис. 270.

4. В качестве второго примера рассмотрим плоское течение жидкости параллельно оси X, когда скорость потока меняется в поперечном направлении по линейному закону $v_x = ay$ (рис. 270). Чтобы убедиться в вихревом характере течения, возьмем прямоугольный контур $ABCD$ со сторонами, параллельными координатным осям. Циркуляция скорости по этому контуру будет

$$\Gamma = (x_2 - x_1)(v_1 - v_2) = -a(x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Ее отношение к площади контура $\Delta S = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$, или ротор скорости $\boldsymbol{v}$ будет

$$\mathrm{rot}_z \boldsymbol{v} = -a,$$

или

$$\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}. \qquad (102.4)$$

Если v_x меняется с координатой y не по линейному закону, а произвольно, то формула (102.4) остается верной, однако $\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{v}$ становится функцией координаты y.

Заметим еще, что в разбираемом примере скорость $\boldsymbol{v}$ можно представить в виде векторной суммы двух векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ с компонентами

$$v_{1x} = \frac{v_x}{2} = \frac{a}{2}y, \quad v_{2x} = \frac{v_x}{2} = \frac{a}{2}y,$$

$$v_{1y} = -\frac{a}{2}x, \qquad v_{2y} = \frac{a}{2}x.$$

Вектор $\boldsymbol{v}_1$ представляется векторным произведением

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{a}{2}[\boldsymbol{kr}] = \frac{a}{2}y\boldsymbol{i} - \frac{a}{2}x\boldsymbol{j}.$$

Поэтому движение со скоростью $\boldsymbol{v}_1$ может быть интерпретировано как вращение вокруг оси Z с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = -\frac{a}{2}\boldsymbol{k}$. Компоненты же вектора $\boldsymbol{v}_2$ могут быть получены из потенциала скоростей $\varphi = \frac{a}{2}xy$ по формулам

$$v_{2x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_{2y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Значит, движение со скоростью $\boldsymbol{v}_2$ является потенциальным. Можно в общем виде показать, что произвольное движение жидкости можно разложить на *вращение* и *потенциальное течение*, причем угловая скорость вращения и ее направление в пространстве могут непрерывно меняться от точки к точке.

Тангенциальный разрыв может рассматриваться как пример вихревого течения. В вихревом характере движения в этом случае можно убедиться совершенно так же, как при разборе последнего примера. Распадаясь, тангенциальный разрыв переходит в вихревое турбулентное движение.

§ 103. Пограничный слой и явление отрыва

1. При больших числах Рейнольдса силы вязкости вдали от поверхности обтекаемого тела не играют существенной роли. Здесь они малы по сравнению с силами, обусловленными разностями давлений. Ими можно пренебречь и считать жидкость идеальной. Не так, однако, обстоит дело вблизи поверхности обтекаемого тела. Силы вязкого трения вызывают *прилипание жидкости* к поверхности