

или

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (102.4)$$

Если  $v_x$  меняется с координатой  $y$  не по линейному закону, а произвольно, то формула (102.4) остается верной, однако  $\operatorname{rot}_z \mathbf{v}$  становится функцией координаты  $y$ .

Заметим еще, что в разбираемом примере скорость  $\mathbf{v}$  можно представить в виде векторной суммы двух векторов  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  с компонентами

$$\begin{aligned} v_{1x} &= \frac{v_x}{2} = \frac{a}{2} y, & v_{2x} &= \frac{v_x}{2} = \frac{a}{2} y, \\ v_{1y} &= -\frac{a}{2} x, & v_{2y} &= \frac{a}{2} x. \end{aligned}$$

Вектор  $\mathbf{v}_1$  представляется векторным произведением

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{a}{2} [\mathbf{k}\mathbf{r}] = \frac{a}{2} y\mathbf{i} - \frac{a}{2} x\mathbf{j}.$$

Поэтому движение со скоростью  $\mathbf{v}_1$  может быть интерпретировано как вращение вокруг оси  $Z$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = -\frac{a}{2} \mathbf{k}$ . Компоненты же вектора  $\mathbf{v}_2$  могут быть получены из потенциала скоростей  $\varphi = \frac{a}{2} xy$  по формулам

$$v_{2x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_{2y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Значит, движение со скоростью  $\mathbf{v}_2$  является потенциальным. Можно в общем виде показать, что произвольное движение жидкости можно разложить на *вращение* и *потенциальное течение*, причем угловая скорость вращения и ее направление в пространстве могут непрерывно меняться от точки к точке.

Тангенциальный разрыв может рассматриваться как пример вихревого течения. В вихревом характере движения в этом случае можно убедиться совершенно так же, как при разборе последнего примера. Распадаясь, тангенциальный разрыв переходит в вихревое турбулентное движение.

### § 103. Пограничный слой и явление отрыва

1. При больших числах Рейнольдса силы вязкости вдали от поверхности обтекаемого тела не играют существенной роли. Здесь они малы по сравнению с силами, обусловленными разностями давлений. Ими можно пренебречь и считать жидкость идеальной. Не так, однако, обстоит дело вблизи поверхности обтекаемого тела. Силы вязкого трения вызывают *прилипание жидкости* к поверхности

обтекаемого тела, т. е. удерживают частицы жидкости в состоянии покоя, несмотря на наличие градиента давления в направлении потока жидкости. Отсюда следует, что вблизи поверхности тела силы вязкого трения *того же порядка*, что и силы разности давлений. Чтобы это было так, скорость жидкости должна очень быстро нарастать при удалении от поверхности тела. Это быстрое нарастание происходит в тонком приповерхностном слое жидкости, называемом *пограничным слоем*. Теория пограничного слоя была создана в основном Л. Прандтлем. Дадим качественное представление о некоторых выводах этой теории.

2. Толщина пограничного слоя  $\delta$  относится к числу не вполне четко определенных понятий, так как граница слоя со стороны жидкости не является резко очерченной. Толщина слоя зависит не только от свойств жидкости, но и от формы поверхности обтекаемого тела. Она не остается постоянной на поверхности тела, а возрастает в направлении потока от передней части тела к задней. Поэтому о точном выражении для  $\delta$  говорить не приходится. Речь может идти только об оценке. Толщину пограничного слоя легко оценить, если заметить, что в нем силы вязкости и силы, обусловленные разностями давлений, по порядку величины одинаковы. Оценим сначала силу вязкого трения  $f_{\text{тр}}$ , действующую на единицу объема жидкости в пограничном слое. Градиент скорости жидкости поперек течения в пограничном слое порядка  $v/\delta$ . Вязкая сила, действующая на площадку  $S$  пограничного слоя, будет  $\sim \eta S v/\delta$ , а сила, действующая на единицу объема,

$$f_{\text{тр}} \sim \frac{\eta S v/\delta}{S\delta} = \eta \frac{v}{\delta^2}.$$

Оценим теперь силу разности давлений  $f_{\text{дав}}$ , также отнесенную к единице объема жидкости. Она равна  $f_{\text{дав}} = -\text{grad } P$  (см. § 90). Изменения давления поперек пограничного слоя малы, да и вообще не играют роли в рассматриваемом вопросе — нас интересует только градиент давления *в направлении потока*. Его можно оценить, рассматривая внешний поток жидкости, т. е. поток вне пограничного слоя. К этому потоку применимо уравнение Бернулли  $P = P_0 - \frac{1}{2} \rho v^2$ , из которого следует  $\text{grad } P = -(\rho/2) \text{grad } v^2$ . Значит, по порядку величины сила  $f_{\text{дав}}$  будет  $f_{\text{дав}} \sim \rho v^2/l$ , где  $l$  — характерный линейный размер обтекаемого тела. Приравнявая обе силы  $f_{\text{тр}}$  и  $f_{\text{дав}}$ , получаем после выполнения элементарных арифметических действий

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta l}{\rho v}}, \quad (103.1)$$

или

$$\delta \sim \frac{l}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (103.2)$$

Например, для шара диаметра  $D = 10$  см в потоке воздуха, движущегося со скоростью  $v = 30$  м/с, число Рейнольдса равно  $Re = vD/\nu = 2 \cdot 10^5$  (кинематическая вязкость воздуха при  $20^\circ\text{C}$   $\nu = 0,15$  см<sup>2</sup>/с), а толщина пограничного слоя  $\delta \approx D/\sqrt{Re} \approx 0,2$  мм.

3. При малых значениях числа Рейнольдса порядка единицы и меньше соображения, на которых основан вывод формулы (103.2), неприменимы. Тем не менее и в этих случаях формула (103.2) приводит к качественно верному выводу, что толщина пограничного слоя становится порядка размеров тела. При таких условиях говорить о пограничном слое уже не имеет смысла. Представление о пограничном слое неприменимо также и к стационарному ламинарному течению жидкости по трубе. Причина этого в том, что при таком движении силы вязкости уравниваются градиентами давлений не только вблизи стенок трубы, но и во всем объеме жидкости. И действительно, согласно формулам (97.2) и (97.3), скорость жидкости в круглой трубе определяется выражением

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Профиль скорости совершенно не зависит от вязкости жидкости, а следовательно, и от числа Рейнольдса. Если пользоваться представлением о пограничном слое, то следует сказать, что пограничный слой заполняет всю трубу, каковы бы ни были значения числа Рейнольдса. Но в таких условиях понятие пограничного слоя становится бессодержательным. Поэтому в дальнейшем такие случаи не рассматриваются, а речь идет о потоке жидкости, обтекающем тело, причем предполагается, что числа Рейнольдса велики.

4. Поскольку в пограничном слое скорость меняется в направлении, перпендикулярном к слою, движение жидкости в пограничном слое является вихревым. А всякое вихревое движение содержит вращение, с которым связан момент количества движения (см. § 102, п. 4).

5. Если бы пограничный слой, образующийся в результате действия сил вязкости, не отрывался от тела, то изучение движения жидкости можно было бы производить в предположении ее идеальности. Влияние пограничного слоя свелось бы к некоторому увеличению эффективных размеров тела. Именно так ведет себя пограничный слой на передней части тела, обращенной к потоку жидкости. Однако на задней части тела пограничный слой в большинстве случаев время от времени *отрывается* от поверхности обтекаемого тела. В этих случаях предположение о полном отсутствии сил вязкости приводит к результатам, совершенно не согласующимся с действительностью. Отрыв пограничного слоя приводит к качественным изменениям всей картины обтекания тела.

Почему же происходит отрыв пограничного слоя и к каким последствиям он приводит? Благодаря силам вязкости частицы жидко-

сти в пограничном слое движутся медленнее, чем во внешнем потоке. Во внешнем потоке имеется разность давлений, вызывающая ускорение или замедление потока. Такая же разность давлений должна существовать и в пограничном слое, так как разность давлений между границами слоя пренебрежимо мала (в противном случае частицы жидкости в пограничном слое имели бы ускорения, перпендикулярные к поверхности тела). Во внешнем потоке, обтекающем переднюю часть тела, давление падает в направлении движения жидкости. Следовательно, то же самое будет и в пограничном слое. Сила разности давлений направлена вдоль по течению. Поэтому не только во внешнем потоке, но и в пограничном слое скорости частиц жидкости увеличиваются, что позволяет им продолжать движение по поверхности тела, несмотря на действие сил трения. Не то происходит в потоке, обтекающем заднюю часть тела. Здесь давление возрастает в направлении потока. Движение замедляется как во внешнем потоке, так и в пограничном слое. А так как в пограничном слое частицы движутся медленнее, чем во внешнем потоке, то при достаточном замедлении последнего они могут остановиться и даже начать движение в обратную сторону. В результате около поверхности обтекаемого тела возникнет *возвратное движение* жидкости, несмотря на то, что внешний поток продолжает по-прежнему двигаться вперед. Новые массы жидкости, подтекающие к месту возникновения возвратного течения, также сначала останавливаются, а затем начинают двигаться назад. (При недостаточно сильном замедлении внешнего потока возвратное движение пограничного слоя может и не возникнуть.) Количество заторможенной жидкости между поверхностью тела и внешним потоком быстро увеличивается, возвратное движение распространяется все шире и шире и, наконец, совершенно оттесняет внешний поток от поверхности тела. Возникает отрыв течения от обтекаемого тела. Получающаяся поверхность разрыва неустойчива и быстро свертывается в вихрь. При этом часть заторможенной жидкости оказывается вовлеченной в область вихря, а самый вихрь уносится течением.

6. Все эти стадии образования вихря хорошо видны на рис. 271, *а, б, в*, на котором представлены шесть последовательных фотографий потока воды, обтекающего неподвижный цилиндр \*). Для того чтобы линии тока сделать видимыми, поверхность текущей воды обсыпалась порошком алюминия. В первый момент вокруг цилиндра возникало потенциальное течение, линии тока которого, расходившиеся перед цилиндром, вновь смыкались позади него. Дальнейшие фотографии показывают, как меняется последующее течение жидкости. На последних трех фотографиях видно, что за цилиндром обра-

\*) Фотографии рис. 271, 272, 273, 279, 280, 281 взяты из книги: Л. Прандтль, О. Гиттенс, Гидро- и аэромеханика, т. II, ОНТИ, М.—Л., 1935. На рис. 271 течение направлено слева направо.

зуются два вихря. Сначала один из них, а затем и другой отрываются от цилиндра и уносятся потоком жидкости. Уносимые вихри сменяются новыми, попеременно возникающими в каждом из двух потоков, отрывающихся сверху и снизу от поверхности обтекаемого тела. Все эти вихри уносятся от тела с одинаковой скоростью.

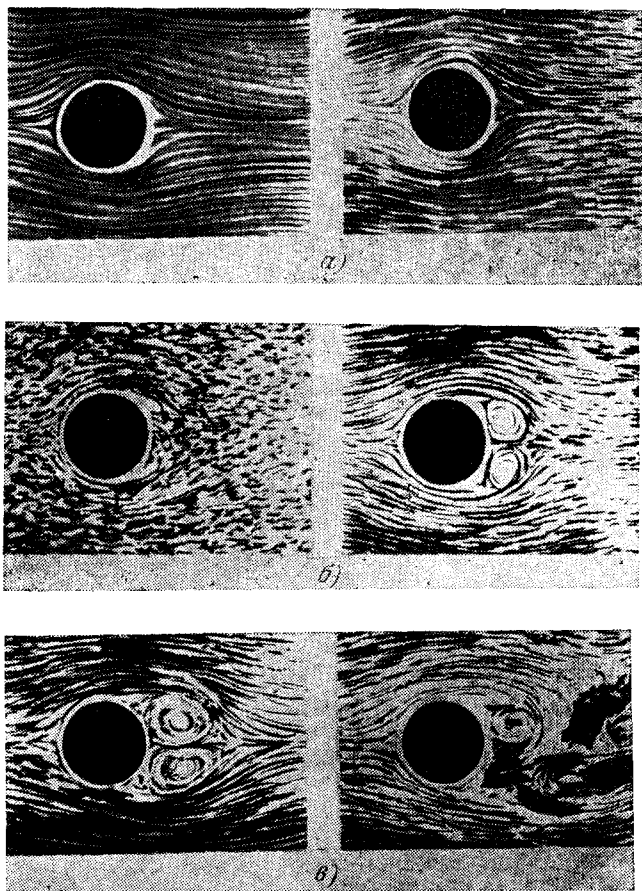


Рис. 271.

Такая система вихрей называется *вихревой дорожкой Кармана* (1881—1963) по имени ученого, теоретически изучившего ее. Она представлена на рис. 272 и 273. Первый рисунок представляет картину течения в системе отсчета, в которой цилиндр неподвижен, а жидкость течет слева направо; второй — в системе отсчета, в которой неподвижна невозмущенная жидкость, а цилиндр движется справа налево.

Скорость, с которой уносятся вихри, меньше скорости потока, так как в вихрях собираются как раз те частицы жидкости, которые тормозились при обтекании тела. Поэтому импульс, уносимый потоком жидкости вместе с движущимися в ней вихрями, меньше



Рис. 272.

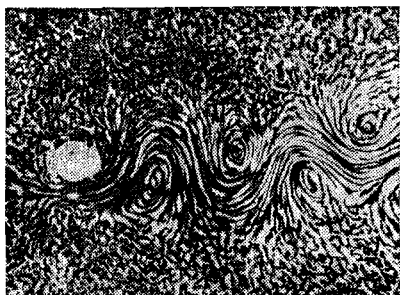


Рис. 273.

импульса, который приносит поток, натекающий на тело. Это уменьшение импульса потока жидкости проявляется в возникновении силы лобового сопротивления, действующей на тело в направлении потока.

7. Из изложенного видно, что представлением о пограничном слое можно пользоваться только на передней части тела, простирающейся до того места, в котором происходит отрыв течения от поверхности тела (это место называется *линией отрыва*). Начиная с этого места, за телом возникает область течения, длина которой обычно намного превосходит характерные размеры самого тела (рис. 274). В эту область попадают частицы из пограничного слоя. Поэтому средняя скорость течения в ней меньше скорости набегающего потока, а само течение вихревое и, как правило, турбулентное. Эта область называется *следом*. Наличием следа и объясняется та часть лобового сопротивления, которая обусловлена разностью давлений на переднюю и заднюю части тела. Чем шире область отрыва, т. е. чем шире след, тем больше при прочих равных условиях лобовое сопротивление. Существованием следа, как мы увидим в следующем параграфе, объясняется и возникновение подъемной силы.

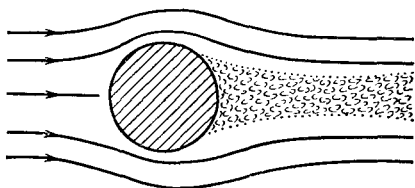


Рис. 274.

8. При не очень больших числах Рейнольдса движение в пограничном слое является ламинарным. При увеличении числа Рейнольдса ламинарное течение становится неустойчивым и начинается

турбулизация пограничного слоя. Она начинается с задней части пограничного слоя, примыкающей к линии отрыва, и постепенно распространяется на переднюю часть слоя. Таким образом, в передней части пограничный слой ламинарный, затем он переходит в турбулентный, а за линией отрыва образуется след. Для шара турбулизация пограничного слоя начинается при числах Рейнольдса  $\sim 3 \cdot 10^5$ . Следствием турбулизации пограничного слоя является смещение линии отрыва к задней части тела и связанное с ним сужение следа. В результате коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  и даже само лобовое сопротивление  $F_x$  уменьшаются. Это явление называется *кризисом сопротивления*. Кризис сопротивления может и не наступить, если с увеличением скорости течения линия отрыва не смещается. Тогда коэффициент сопротивления  $C_x$  становится не зависящим от числа Рейнольдса. Так будет, например, при обтекании пластинки с резкими краями, поставленной перпендикулярно к потоку. Здесь линия отрыва определяется чисто геометрическими соображениями и совпадает с краями пластинки.

#### § 104. Подъемная сила крыла самолета

1. С явлением отрыва связано и возникновение подъемной силы. Нас будет интересовать главным образом подъемная сила, действующая на крыло самолета, хотя механизм возникновения подъемной силы в случае тел другой формы сохраняется тем же самым. При полете самолета с постоянной скоростью его ориентация в пространстве остается неизменной. Это указывает на то, что при таком

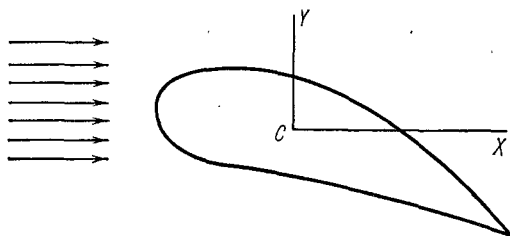


Рис. 275.

полете моменты всех внешних сил, действующих на самолет, уравновешиваются, а его момент количества движения остается неизменным. Для упрощения будем рассматривать отдельное крыло, равномерно движущееся в воздухе и ориентированное перпендикулярно к плоскости рисунка (рис. 275). Длину крыла будем считать бесконечно большой. Такое крыло называется *крылом бесконечного размаха*. Удобно перейти к системе отсчета, связанной с крылом, поместив начало координат в одну из точек крыла, например в его центр масс  $C$ . Понятно, что эта система отсчета будет инерциальной.