§ 90. Основные уравнения равновесия и движения жидкостей

1. Силы, действующие в жидкости, как и во всякой другой сплошной среде, обычно разделяются на силы *массовые* (объемные) и силы *поверхностные*. Массовая сила пропорциональна массе dm, а с ней и объему dV элемента жидкости, на который она действует. Эту силу можно обозначить как $\boldsymbol{f}\,dV$, называя $\boldsymbol{f}$ *объемной плотностью массовых сил*. Важнейшими примерами массовых сил являются сила тяжести и силы инерции (когда движение рассматривают в неинерциальных системах отсчета). В случае силы тяжести $\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{g}$, где ρ — плотность жидкости, а $\boldsymbol{g}$ — ускорение силы тяжести. Поверхностные силы — это такие силы, которым подвергается каждый объем жидкости благодаря нормальным и касательным напряжениям, действующим на его поверхности со стороны окружающих частей жидкости.

2. Рассмотрим случай, когда касательных напряжений нет, а есть только силы нормального давления. В идеальной жидкости это будет всегда, т. е. при любых движениях. В остальных случаях — тогда, когда жидкость покоится, т. е. в *гидростатике*. Определим равнодействующую сил давления, действующих на бесконечно малый элемент объема жидкости dV. Сначала найдем проекцию этой равнодействующей на направление координатной оси X. Возьмем в качестве элемента dV бесконечно малый цилиндр с площадью оснований dS и длиной dx (рис. 230), ориентированный вдоль оси X. Абсциссы оснований цилиндра обозначим соответственно x и $x+dx$. Сила давления, действующая на первое основание, равна $P(x)\,dS$, на второе — $P(x+dx)\,dS$. В скобках у P указано значение аргумента x, от которого P зависит. Конечно, P может зависеть и от координат y, z, а также от времени t. Но все эти аргументы не меняются при переходе от одного основания цилиндра к другому, а потому в рассматриваемом нами вопросе могут считаться постоянными. При желании поперечные размеры цилиндра можно взять бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с длиной dx. А тогда y и z могут рассматриваться постоянными не только при смещениях вдоль цилиндра, но и поперек. Силы давления, действующие на боковую поверхность цилиндра, перпендикулярны к оси X, а потому при вычислении составляющих вдоль этой оси роли не играют. Итак, проекция сил давления на ось X, действующих на рассматриваемый элемент объема жидкости, равна

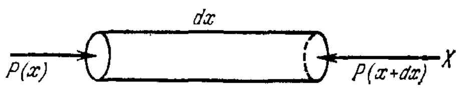

Рис. 230.

$$[P(x)-P(x+dx)]\,dS.$$

Бесконечно малую разность в квадратных скобках можно заменить дифференциалом функции P:

$$P(x+dx)-P(x)=dP_{\substack{y=\text{const}\\ z=\text{const}\\ t=\text{const}}}=\left(\frac{dP}{dx}\right)_{\substack{y=\text{const}\\ z=\text{const}\\ t=\text{const}}}dx.$$

Дополнительные условия $y=\text{const}$, $z=\text{const}$, $t=\text{const}$ указывают на то, что при взятии производной $\frac{dP}{dx}$ и дифференциала dP координаты y, z и время t должны рассматриваться как постоянные. Производная функции $P(x, y, z, t)$, взятая при таких дополнительных условиях, как известно, называется *частной производной* и обозначается посредством $\frac{\partial P}{\partial x}$. Используя это обозначение, получаем для вычисляемой проекции силы

$$-\frac{\partial P}{\partial x}dS\,dx=-\frac{\partial P}{\partial x}dV,$$

так как $dS\,dx=dV$. Эта проекция, таким образом, пропорциональна величине элемента объема dV, и ее можно обозначить как $s_x\,dV$. Величина s_x есть x-составляющая силы, действующей на единицу объема жидкости, которая возникает из-за изменения нормального давления P в пространстве. По самому смыслу она не может зависеть от формы элемента dV. Мы взяли dV в виде цилиндра только потому, что таким путем достигается наибольшая простота и наглядность вычисления. Можно таким же путем найти проекции s_y и s_z, выбирая в качестве dV элементарные цилиндры, ориентированные параллельно координатным осям Y и Z. В результате найдем, что на единицу объема жидкости действует сила $\boldsymbol{s}$, обусловленная поверхностными силами давления, точнее, их изменениями в пространстве. Ее проекции равны

$$s_x=-\frac{\partial P}{\partial x},\qquad s_y=-\frac{\partial P}{\partial y},\qquad s_z=-\frac{\partial P}{\partial z}\tag{90.1}$$

Сам вектор $\boldsymbol{s}$ равен

$$\boldsymbol{s}=-\frac{\partial P}{\partial x}\boldsymbol{i}-\frac{\partial P}{\partial y}\boldsymbol{j}-\frac{\partial P}{\partial z}\boldsymbol{k},\tag{90.2}$$

или сокращенно

$$\boldsymbol{s}=-\operatorname{grad}P.\tag{90.3}$$

Мы ввели обозначение

$$\operatorname{grad}P\equiv\frac{\partial P}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial P}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial P}{\partial z}\boldsymbol{k}.\tag{90.4}$$

Этот вектор называется *градиентом скаляра* P (см. также § 29). Таким образом, *объемная плотность* $\boldsymbol{s}$ *результирующей сил давления, действующих на элементы объема жидкости, равна гради-*

енту P, взятому с противоположным знаком. Мы видим, что сила $\boldsymbol{s}$ обусловлена не величиной давления P, а его *пространственными изменениями.* Величина P также существенна. Она определяет *степень сжатия жидкости* в рассматриваемой точке пространства.

3. В состоянии равновесия сила $\boldsymbol{s}$ должна уравновешиваться массовой силой $\boldsymbol{f}$. Это приводит к уравнению

$$\operatorname{grad} P = \boldsymbol{f}, \tag{90.5}$$

которое является *основным уравнением гидростатики.* В координатной форме оно имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = f_z. \tag{90.6}$$

Можно написать и основное уравнение гидродинамики идеальной жидкости. В этом случае формула (90.3) также применима, а потому мы получаем

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f} - \operatorname{grad} P, \tag{90.7}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость, а $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ — ускорение жидкости в рассматриваемой точке. Уравнение (90.7) называется *уравнением Эйлера.*

4. Уравнение (90.5) показывает, что при равновесии жидкости сила $\boldsymbol{f}$ (точнее, плотность силы или сила, действующая на единицу объема жидкости) должна выражаться градиентом однозначной скалярной функции. Это есть необходимое и достаточное условие того, чтобы сила $\boldsymbol{f}$ была консервативной (см. § 29). Таким образом, *для равновесия жидкости необходимо, чтобы силовое поле, в котором она находится, было консервативным.* В неконсервативных силовых полях равновесие невозможно.

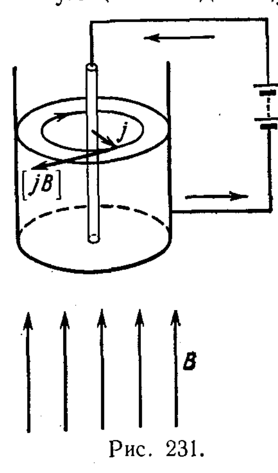

Рис. 231.

Примером может служить проводящая жидкость, помещенная в магнитное поле, когда через нее проходит электрический ток. В этом случае со стороны магнитного поля на жидкость действует сила $\boldsymbol{f} = C\,[\boldsymbol{jB}]$, где $\boldsymbol{B}$ — напряженность (точнее, индукция) магнитного поля, $\boldsymbol{j}$ — плотность тока, а C — численный коэффициент, значение которого зависит от выбора единиц. Поместим цилиндрический сосуд с раствором электролита (например, $CuSO_4$) над одним из полюсов сильного электромагнита (рис. 231). Вдоль оси цилиндра расположен цилиндрический проводник. Между ним и боковой стенкой сосуда наложим электрическое напряжение в несколько вольт. В электролите вдоль радиусов цилиндра потечет электрический ток. Сила $\boldsymbol{f} = C\,[\boldsymbol{jB}]$ будет направлена по касательным к окружностям с центрами на оси цилиндра. Она вызовет вращение жидкости вокруг указанной оси. Вращение будет ускоряться до тех пор, пока силы, действующие со стороны магнитного поля, не уравновесятся силами внутреннего и внешнего трения.