§ 91. Гидростатика несжимаемой жидкости

1. Если нет массовых сил (т. е. $f = 0$), то уравнения (90.6) сводятся к $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$. Отсюда следует, что в этом случае при равновесии давление P одно и то же по всему объему жидкости.

Если жидкость находится в поле тяжести, то $f = \rho \mathbf{g}$. Направим ось Z вертикально вверх. Тогда основные уравнения равновесия жидкости примут вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g. \tag{91.1}$$

Из них следует, что при механическом равновесии давление не может зависеть от x и y. Оно должно оставаться постоянным в каждой горизонтальной плоскости $z = \text{const}$. Горизонтальные плоскости суть *плоскости равного давления.* В частности, свободная поверхность жидкости горизонтальна, поскольку она находится под постоянным давлением атмосферы. Таким образом, при механическом равновесии давление может зависеть лишь от координаты z. Из третьего уравнения (91.1) следует поэтому, что для механического равновесия необходимо, чтобы произведение ρg было функцией только z. Так как g не зависит от x и y (зависимостью g от географической широты и долготы места мы пренебрегаем), то, следовательно, и плотность ρ может меняться только с высотой. В силу уравнения состояния (89.4) давлением P и плотностью ρ определяется температура жидкости T. Итак, *при механическом равновесии давление, температура и плотность жидкости являются функциями только z и не могут зависеть от x и y.*

2. Допустим теперь, что жидкость *однородна* и ее можно рассматривать как *несжимаемую* ($\rho = \text{const}$). Кроме того, будем считать постоянным ускорение силы тяжести g, пренебрегая его зависимостью от высоты z. Тогда легко интегрируется и последнее уравнение системы (91.1). В результате такого интегрирования получим

$$P = P_0 - \rho g z. \tag{91.2}$$

Постоянная интегрирования P_0 есть давление жидкости на высоте $z = 0$, т. е. атмосферное давление, если начало координат поместить на свободной поверхности жидкости. Формула (91.2) определяет также давление жидкости на дно и стенку сосуда, а также на поверхность всякого тела, погруженного в жидкость. Она охватывает всю гидростатику, излагаемую в школьных курсах физики.

3. Остановимся теперь на *законе Архимеда* (ок. 287—212 г. до н. э.) и связанных с ним вопросах. Выделим мысленно из жидкости произвольный объем, ограниченный замкнутой поверхностью S (рис. 232). Если жидкость находится в механическом равновесии, то, разумеется, должен находиться в равновесии и выделенный объем. Поэтому должны обращаться в нуль равнодействующая и момент всех внешних сил, действующих на рассматриваемый объем жидкости. Внешние силы — это вес $\boldsymbol{Q}$ выделенного объема жидкости и давление на поверхность S со стороны окружающей жидкости. Значит, равнодействующая F сил гидростатического давления, действующих на поверхность S, должна равняться Q — весу жидкости в объеме, ограниченном поверхностью S. Эта равнодействующая должна быть направлена вверх и проходить через центр масс A выделенного объема жидкости, чтобы полный момент внешних сил, действующих на него, был равен нулю. Допустим теперь, что жидкость из выделенного нами объема удалена, и на ее место помещено любое твердое тело. Если это тело удерживается в равновесии, то в состоянии окружающей жидкости *никаких изменений не произойдет*. Не изменится и давление, оказываемое жидкостью на поверхность S. В результате мы приходим к закону Архимеда. *Если тело, погруженное в жидкость, удерживается в механическом равновесии, то со стороны окружающей жидкости оно подвергается выталкивающей силе гидростатического давления, численно равной весу жидкости в объеме, вытесненном телом. Эта выталкивающая сила направлена вверх и проходит через центр масс A жидкости, вытесненной телом.* Точку A будем называть *центром плавучести тела*. Ее положением, как будет показано ниже, определяются *равновесие* и *устойчивость* плавающего тела.

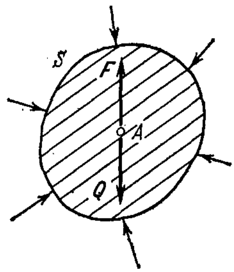

Рис. 232.

4. С помощью закона Архимеда решается вопрос о равновесии тел, плавающих в жидкости. *Для равновесия необходимо, чтобы вес тела был равен весу вытесненной им жидкости, а центр плавучести A лежал на одной вертикали с центром масс самого тела.* Что касается устойчивости равновесия, то при решении этого вопроса надо различать два случая.

Случай 1. Плавающее тело погружено в жидкость целиком. В этом случае при любых смещениях и поворотах тела его центр масс C и центр плавучести A сохраняют свое положение относительно тела. *Равновесие устойчиво, если центр масс тела C лежит ниже его центра плавучести A, и неустойчиво, если он лежит выше A.* Действительно, если тело слегка повернуть относительно положения равновесия вокруг горизонтальной оси, то в обоих случаях момент пары сил $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{F}$ будет стремиться опустить точку C и поднять точку A (рис. 233). В результате этого тело приходит в положение устойчивого равновесия, в котором точка C расположена ниже точки A.

Случай 2. Плавающее тело погружено в жидкость не целиком, а частично выступает над ее свободной поверхностью. По сравнению с предыдущим этот случай является более сложным, так как при смещении тела из положения равновесия меняется форма вытесняемого им объема жидкости. Вследствие этого положение центра плавучести относительно плавающего тела изменяется, что и усложняет исследование. Рассматриваемый случай представляет основной интерес при исследовании устойчивости плавающих кораблей. На рис. 234, *а* схематически изображен корпус корабля в «килевом» положении, когда центр масс корабля C и центр плавучести A лежат на одной вертикали, совпадающей с вертикальной осью симметрии корабля. При наклоне корабля на малый угол φ (рис. 234, *б*) центр плавучести смещается относительно корабля в точку A', оставаясь практически на прежней высоте. Выталкивающая сила теперь проходит через точку A', и линия ее действия пересекает вертикальную ось симметрии корабля в точке M, называемой *метацентром*. Если метацентр лежит выше центра масс корабля, то

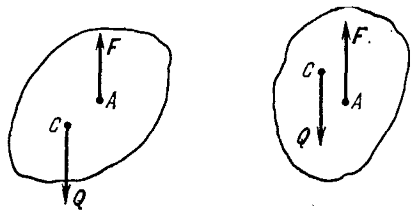

Рис. 233.

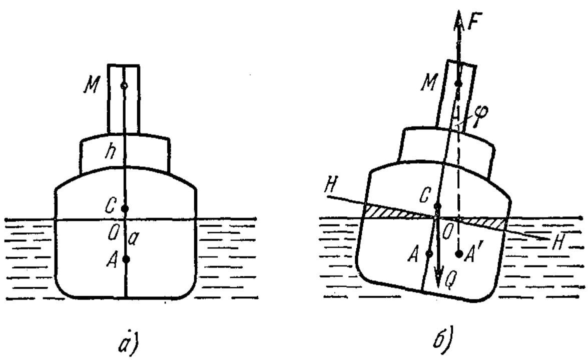

Рис. 234.

момент пары сил $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F}$ будет возвращать корабль в исходное положение. В этом случае равновесие корабля устойчивое. Если же метацентр M лежит ниже центра масс корабля, то пара сил $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F}$ будет еще больше отклонять корабль от исходного положения. В этом случае равновесие неустойчиво. Расстояние h между точками C и M называется *метацентрической высотой. Если метацентрическая высота положительна, то равновесие устойчиво, если отрицательна, то неустойчиво.* Чем больше h, тем устойчивее равновесие. Момент пары сил $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{F}$, возвращающий корабль в исходное положение, называется *выпрямляющим моментом*. Он, очевидно, равен

$$M = Qh \sin \varphi. \tag{91.3}$$

Величина h сама зависит от φ, так как при изменении наклона φ меняется и положение метацентра относительно корабля. Найдем это положение и вычислим метацентрическую высоту h в предельном случае бесконечно малых углов наклона φ.

Так как выталкивающая сила проходит через точку A' и направлена вертикально вверх, то ее момент относительно точки A будет $N = Q \cdot AM \sin \varphi$ или (при малых φ) $N = Q(h + a)\varphi$, где a — расстояние между центром масс корабля C и его центром плавучести в положении равновесия. Величина a считается положительной, если точка C лежит выше A, и отрицательной, если она лежит ниже A. Величина момента N, конечно, не зависит от того, в какой точке линии $A'M$ выбрана точка приложения выталкивающей силы $\boldsymbol{F}$. Разложим силу $\boldsymbol{F}$ на составляющую $\boldsymbol{F}_{\parallel}$, параллельную оси корабля AM, и составляющую $\boldsymbol{F}_{\perp}$, к ней перпендикулярную. Если точку приложения силы $\boldsymbol{F}$ поместить в A', то составляющая $\boldsymbol{F}_{\perp}$ не даст момента относительно центра плавучести A, и вычисления упростятся. Тогда полный момент N будет создаваться только составляющей $\boldsymbol{F}_{\parallel}$. Понятно, что момент этой составляющей будет одним и тем же относительно всех точек, лежащих на оси AM. Из изложенного следует, что величину $N = Q(h + a)\varphi$ можно рассматривать как момент выталкивающих сил давления относительно произвольной точки оси AM, если из этих сил вычесть их составляющие, перпендикулярные к той же оси. Поэтому момент N можно вычислить иначе. Если корабль наклонен на угол φ, то выталкивающие силы давления с правой стороны увеличатся, а с левой — уменьшатся. При этом мы имеем в виду не полные силы, а только их составляющие, параллельные AM. Пусть x — расстояние (координата) произвольной точки плоскости HH от оси Y, проходящей через O перпендикулярно к плоскости рисунка. Тогда увеличение давления в соответствующей точке дна будет $\rho g x \varphi$, а момент N представится выражением

$$N = \rho g \varphi \int x^2 \, dS = \rho g I \varphi,$$

где I — *момент инерции* поперечного сечения корабля вдоль ватерлинии относительно оси $Y: I = \int x^2 \, dS$ (ср. § 80, п. 1). Сравнивая оба выражения для N, получаем

$$h = \frac{I}{V} - a, \tag{91.4}$$

где $V = (Q/\rho g)$ — *водоизмещение корабля*, т. е. объем вытесняемой им воды.

5. Рассмотрим теперь жидкость в сосуде, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Будем предполагать, что жидкость вращается вместе с сосудом, а сам сосуд обладает осевой симметрией, например имеет цилиндрическую форму. Эта задача сводится к статической, если перейти во вращающуюся систему отсчета, в которой жидкость покоится. Теперь в уравнении (90.5) $\boldsymbol{f}$ слагается из силы тяжести $\rho\boldsymbol{g}$ и центробежной силы $\rho\omega^2\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, проведенный от оси вращения к рассматриваемой точке и перпендикулярный оси. Если поместить начало координат на оси вращения так, чтобы ось Z совпала с осью вращения, то уравнения (90.6) примут вид

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\rho\omega^2 x,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\rho\omega^2 y,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-\rho g. \tag{91.5}$$

Считая ρ постоянной и интегрируя, получим

$$P=\frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2)-\rho g z+P_0, \tag{91.6}$$

или

$$P=\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2-\rho g z+P_0. \tag{91.6a}$$

Уравнение свободной поверхности $P=\text{const}$ принимает вид $^1/_2\,\omega^2(x^2+y^2)-gz=\text{const}$. Это — параболоид вращения, обращенный своей выпуклостью вниз. Если начало координат поместить в вершину параболоида, то постоянная P_0 будет иметь смысл наружного атмосферного давления. Уравнение свободной поверхности жидкости будет $^1/_2\,\omega^2(x^2+y^2)=gz$.

Конечно, рассмотренную задачу можно трактовать и как чисто динамическую. Если жидкость вращается как целое, то при таком движении в ней не возникают силы внутреннего трения. Единственные поверхностные силы, действующие в жидкости, сводятся к силам нормального давления. Поэтому в этом случае можно пользоваться уравнением Эйлера (90.7) независимо от того, является ли жидкость идеальной или вязкой. При равномерном вращении производная $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ сводится к центростремительному ускорению $-\omega^2\boldsymbol{r}$. Поэтому, полагая в уравнении (90.7) $\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{g}$, получим

$$-\rho\omega^2\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{g}-\operatorname{grad}P,$$

а это векторное уравнение эквивалентно трем уравнениям в проекциях (91.5).

Если сосуд имеет плоское дно, то для определения давления на дно надо в формуле (91.6а) положить $z=-h$, где h — высота уровня жидкости над дном на оси вращения (напомним, что ось Z направлена вверх). Получим

$$P-P_0=\rho g h+\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2. \tag{91.7}$$

Давление в центре, таким образом, минимально и монотонно возрастает к краям. С этим связано, например, следующее явление.

Если чайной ложкой привести во вращение воду в стакане, то после прекращения помешивания чаинки и песчинки, имеющиеся в ней, собираются в центре дна. Дело в том, что эти частицы тяжелее воды и опускаются на дно. Здесь их вращение замедляется благодаря силам трения о дно стакана, и под влиянием разности гидростатических давлений частицы перемещаются к центру дна.

Вычислим теперь полную силу давления жидкости на дно сосуда. С этой целью воспользуемся уравнением свободной поверхности жидкости $^1/_2\, \omega^2 r^2 = gz$ и перепишем формулу (91.7) в виде $P - P_0 = \rho g\,(h + z)$. Интегрируя по площади дна, найдем искомую силу

$$F = \rho g \int (h + z)\, dS = \rho g V, \tag{91.8}$$

где V — объем жидкости в сосуде. Как и следовало ожидать, полная сила давления равна весу этого объема жидкости.

ЗАДАЧИ

1. Жидкость налита в сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Вычислить момент сил гидростатического давления, действующих на боковую стенку сосуда, относительно ее нижнего основания.

Ответ. $M = \frac{1}{3}\rho g h^2 S$, где h — высота уровня жидкости относительно дна, S — площадь рассматриваемой боковой стенки сосуда.

2. *Гидростатический парадокс*. Сила давления жидкости на дно сосуда не зависит от формы сосуда, а только от площади дна, разности уровней поверхности жидкости и дна, а также от плотности жидкости. Так, эта сила будет одной и той же для всех трех сосудов, изображенных на рис. 235, если они имеют одинаковое дно, а жидкость налита до одного и того же уровня. При взвешивании сосудов с жидкостью весы должны показать один и тот же вес, поскольку показание весов зависит от силы, с которой дно сосуда

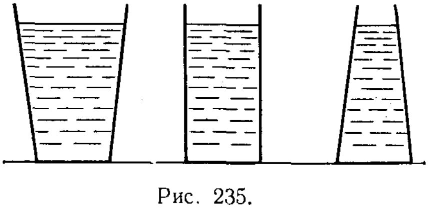

Рис. 235.

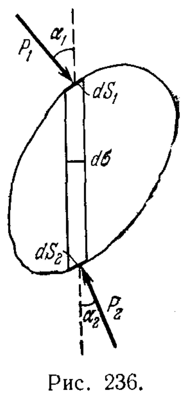

Рис. 236.

давит на чашку весов. Указать, в чем ошибочность приведенного рассуждения. Что в действительности покажут весы?

3. Непосредственным вычислением результирующей сил давления жидкости на поверхность погруженного тела и их моментов убедиться в справедливости закона Архимеда.

Решение. Мысленно разобьем погруженное тело на бесконечно тонкие вертикальные столбики (рис. 236). Допустим для простоты, что каждый столбик пересекает поверхность тела только два раза. (Случай, когда это условие не соблюдается, читателю предлагается разобрать самостоятельно.) Пусть dS_1 и dS_2 — элементарные площадки, вырезаемые одним из столбиков на поверхности тела. Силы, действующие на эти площадки, нормальны к ним и равны соответственно $P_1\,dS_1$ и $P_2\,dS_2$. Их вертикальные составляющие будут $P_1\,dS_1\cos\alpha_1$ и $P_2\,dS_2\cos\alpha_2$, или $P_1\,d\sigma$ и $P_2\,d\sigma$, где $d\sigma = dS_1\cos\alpha_1 = dS_2\cos\alpha_2$ — площадь нормального сечения столбика. Результирующая этих двух сил, направленная вверх, равна $dF_z = (P_2 - P_1)\,d\sigma = \rho g h d\sigma = \rho g dV$, где h — высота столбика, а $dV = h d\sigma$ — его объем. Интегрируя по всему объему тела, находим выталкивающую силу $F_z = \rho g V$. Теперь надо найти момент вертикальных выталкивающих сил, действующих на столбики, относительно произвольной оси. Если ось вертикальна, то момент, очевидно, равен нулю. Поэтому достаточно ограничиться вычислением момента относительно произвольной горизонтальной оси. Примем таковую за координатную ось X. Искомый момент будет $M_x = \int y\,dF_z = g\int \rho y\,dV = g\int y\,dm$, где dm — масса жидкости, вытесненная соответствующим столбиком тела. Аналогично, для момента относительно оси Y: $M_y = g\int x\,dm$. Момент обратится в нуль, когда $\int x\,dm = \int y\,dm = 0$, т. е. когда начало координат помещено на вертикальной оси, проходящей через центр плавучести тела. Тем самым доказано, что линия действия выталкивающей силы проходит через центр плавучести тела. Для завершения доказательства надо было бы еще исследовать, какие силы давления действуют на поверхность погруженного тела в горизонтальных направлениях. Однако этот вопрос не нуждается в специальном исследовании. Например, когда речь идет о силах, действующих параллельно оси X, то достаточно разбить тело на бесконечно малые столбики, параллельные этой оси, а затем повторить все сказанное выше, с той только разницей, что величину g надо положить равной нулю. Отсюда следует, что равнодействующая горизонтальных сил давления, действующих на погруженное тело, и их момент равны нулю.

4. Найти условие устойчивости однородного прямоугольного параллелепипеда, плавающего на поверхности жидкости в положении, когда одно из оснований его горизонтально. Длины сторон горизонтального основания A и B, высота C $(A > B)$. Плотность материала тела относительно жидкости $\rho < 1$.

Ответ. $B^2 > 6\rho(1-\rho)\,C^2$.

5. Та же задача для однородного цилиндра радиуса r и высоты l, плавающего в вертикальном положении.

Ответ. $r^2 > 2\rho(1-\rho)\,l^2$.

6. Та же задача для однородного цилиндра радиуса r и длины l, плавающего в горизонтальном положении.

Ответ. $\dfrac{l}{r} > \left(2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$, где угол α определяется из трансцендентного уравнения $\alpha - \sin\alpha = 2\pi\rho$. Например, при $\rho = 1/2$ из него получаем $\alpha = \pi$, и условие устойчивости принимает вид $l > 4r$. При других значениях ρ равновесие может быть устойчивым и при меньших значениях l. Так, при $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = 3\pi/2$ получаем соответственно $\rho = 1/4 - 1/(2\pi) \approx 0{,}091$ и $\rho = 3/4 + 1/(2\pi) \approx 0{,}841$. При таких значениях ρ равновесие устойчиво, если $l > 2r$. При $l > 4r$ равновесие устойчиво, каково бы ни было $\rho < 1$.

7. Найти распределение давления внутри земного шара, считая его состоящим из однородной несжимаемой жидкости и пренебрегая осевым вращением Земли. Вычислить в том же приближении давление в центре Земли $P_ц$ (см. задачу 5 к § 55).

Ответ. $P = \dfrac{\rho g}{2R}(R^2 - r^2)$, $P_ц = \dfrac{1}{2}\rho g R$, r — расстояние от центра Земли, R — радиус Земли. Если бы земной шар состоял из несжимаемой воды, то было бы $P_ц = \dfrac{1}{20}R$ ($P_ц$ — в атмосферах, R — в метрах). С учетом плотности Земли ($\rho = 5{,}5$)

$$P_ц = 0{,}275R \approx 1{,}75\cdot 10^6 \text{ атм.}$$

8. Оценить сплюснутость Земли, обусловленную ее осевым вращением, считая Землю однородным несжимаемым жидким шаром.

Решение. Так как фигура Земли мало отличается от шаровой, то ускорение силы тяжести внутри земного шара можно считать направленным к центру Земли и пропорциональным расстоянию до ее центра (см. задачу 5 к § 55). В этом приближении с учетом центробежной силы уравнения гидростатики (90.6) принимают вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \frac{x}{R_0} + \rho\omega^2 x,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \frac{y}{R_0} + \rho\omega^2 y,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \frac{z}{R_0},$$

где R_0 — радиус Земли, ω — угловая скорость ее вращения. Начало координат мы поместили в центре Земли, а ось Z направили вдоль оси ее вращения. Интегрируя эти уравнения, получим

$$P = \frac{\rho}{2}\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right)(x^2+y^2) - \frac{\rho g}{2R_0} z^2 + C,$$

где C — постоянная интегрирования, определяющаяся значением давления P на земной поверхности (его можно считать равным нулю, так как атмосферное давление пренебрежимо мало). Сплюснутость Земли определится из требования постоянства давления на земной поверхности. Выбрав сначала точку на экваторе, а затем на полюсе, пишем $P(R_э, 0, 0) = P(0, 0, R_п)$, где $R_э$ и $R_п$ — экваториальный и полярный радиусы Земли. С учетом явного вида P отсюда получаем

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right) R_э^2 = -\frac{g}{R_0} R_п^2$$

и далее

$$R_э - R_п = \frac{\omega^2}{g} \frac{R_э^2 R_0}{R_э + R_п} \approx \frac{\omega^2 R_0^2}{2g}.$$

Следовательно, для сплюснутости ε земного шара получается

$$\varepsilon \equiv \frac{R_э - R_п}{R_0} = \frac{\omega^2 R_0}{2g} \approx \frac{1}{580}.$$

Действительное сжатие Земли заметно больше, а именно $^1/_{297}$. Расхождение объясняется грубостью модели, положенной в основу рассуждений, а также несовершенством метода расчета. При строгой постановке задачи надо учитывать, что поле тяготения сплюснутого шара не является центральным *). Тем самым задача сильно усложняется, так как гравитационное поле уже неизвестно заранее, а само зависит от неизвестной формы поверхности Земли. Подробное исследование показывает, что задача, сформулированная таким образом, не имеет однозначного решения. Возможно несколько различных форм равновесной поверхности, в том числе и эллипсоид вращения с определенной степенью сжатия.

---

*) С учетом этого обстоятельства расчет дает

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \frac{\omega^2 R_0}{g} \approx \frac{1}{232}.$$