§ 92. Барометрическая формула

1. Обратимся теперь к *гидростатике сжимаемой жидкости*. Наибольший интерес представляет равновесие земной атмосферы. Этот случай мы и рассмотрим. Дифференциальные уравнения (90.5) и (91.1) были выведены без использования предположения о несжимаемости жидкости, а потому мы воспользуемся ими и здесь. Первые два уравнения системы (91.1) можно не учитывать, так как из них следует лишь, что давление P может зависеть только от z. Оставшееся третье уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g, \tag{92.1}$$

так как частная $\frac{\partial P}{\partial z}$ и полная $\frac{dP}{dz}$ производные теперь означают одно и то же. Но одного уравнения (92.1) недостаточно, поскольку в него входят две неизвестные функции — давление P и плотность ρ. Нужно дополнительное соотношение между ними.

Будем предполагать, что состав атмосферы один и тот же на всем ее протяжении. Давление P, плотность ρ и температура T газа в состоянии равновесия связаны уравнением состояния. Если газ не слишком плотный, то таковым является *уравнение Клапейрона* (1799—1864)

$$P = \frac{RT}{\mu}\rho, \tag{92.2}$$

где μ — молекулярный вес газа, а R — универсальная газовая постоянная. Ее численное значение равно приближенно

$$R = 8{,}31\cdot 10^7 \text{ эрг}\cdot\text{К}^{-1}\cdot\text{моль}^{-1} = 8{,}31 \text{ Дж}\cdot\text{К}^{-1}\cdot\text{моль}^{-1}.$$

Соотношение (92.2) позволяет исключить из уравнения (92.1) плотность ρ. В результате получится

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}P. \tag{92.3}$$

Понятно, что таким путем мы еще не достигли цели, так как вместо неизвестной плотности ρ ввели новую неизвестную величину — температуру T. Однако последнюю легче измерить на различных высотах. Если T известна как функция z, то уравнение (92.3) уже можно будет проинтегрировать. Следовательно, задача определения давления на различных высотах становится вполне определенной, если задать закон изменения температуры T с высотой.

2. Если отсутствуют ветры и воздушные течения, т. е. атмосфера неподвижна, то говорят, что она находится в *механическом равновесии*. Такое состояние не является еще состоянием *полного равновесия*. Для последнего, кроме того, необходимо, чтобы атмосфера находилась также и в *тепловом равновесии*. Тепловое равновесие означает, что температура T одна и та же на протяжении всей

атмосферы. Если это имеет место, то атмосферу называют *изотермической*.

Конечно, изотермическая атмосфера — это идеализация. Но рассмотрение этого идеализированного случая тем не менее представляет большой интерес. При $T = \text{const}$ уравнение (92.3) легко интегрируется. Для этого переписываем его в виде

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT}\,dz$$

и после интегрирования находим

$$\ln\frac{P}{P_0} = -\frac{\mu g z}{RT},$$

или

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}}. \tag{92.4}$$

По тому же закону меняется и плотность воздуха, а именно

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}}. \tag{92.5}$$

Соотношения (92.4) и (92.5) называются *барометрическими формулами*. Постоянные интегрирования P_0 и ρ_0 имеют смысл давления и плотности воздуха на поверхности Земли. Давление и плотность воздуха убывают с высотой по экспоненциальному закону. При поднятии на высоту

$$h = \frac{RT}{\mu g} \tag{92.6}$$

они убывают в e раз. Величина h называется *высотой однородной атмосферы*. Смысл этого названия станет ясным, если поставить следующий вопрос. Какую высоту H должна была бы иметь воображаемая атмосфера постоянной плотности ρ_0, чтобы она производила на поверхность Земли такое же давление P_0, как и действительная атмосфера? Очевидно, искомая величина определится из условия $P_0 = \rho_0 g H$. Но из уравнения состояния (92.2), если его применить к слою воздуха, прилегающему к поверхности Земли, следует $P_0 = \frac{RT}{\mu}\rho_0$. Используя это соотношение, получаем $H = \frac{RT}{\mu g}$, т. е. $H = h$. Считая средний молекулярный вес воздуха равным $\mu = 28{,}8$, находим для высоты однородной атмосферы при нуле градусов Цельсия ($T = 273\ K$):

$$h = \frac{8{,}31 \cdot 273}{28{,}8 \cdot 9{,}8} \approx 8000\ \text{м} = 8\ \text{км}.$$

Подставляя h в барометрическую формулу (92.4), можно переписать ее в виде

$$P = P_0 e^{-z/h}. \tag{92.7}$$

В таком виде формула удобна для определения разностей высот двух или нескольких точек земной атмосферы. Для этого нужно знать давление воздуха в этих точках, а также температуру. Последняя в пределах рассматриваемых высот, разумеется, должна быть одной и той же.

3. Сделаем в заключение одно замечание относительно устойчивости механического равновесия атмосферы. Мы не будем вводить ограничения, что температура одна и та же на всех высотах, а будем предполагать, что она может меняться с высотой как угодно. Если нарушено состояние механического равновесия, в результате которого некоторая масса воздуха немного поднялась вверх, то в новом положении она будет подвергаться меньшему внешнему давлению. В результате поднявшаяся масса воздуха расширится, а ее плотность уменьшится, так как вследствие малой теплопроводности воздуха во время поднятия рассматриваемая масса практически не будет получать и отдавать тепло. Если окажется, что в новом положении плотность поднявшейся массы больше плотности окружающего воздуха, то эта масса, как более тяжелая, опустится вниз, и равновесие восстановится. Если же ее плотность окажется меньше плотности окружающего воздуха, то она будет подниматься еще выше, и механическое равновесие окажется неустойчивым. Аналогичные соображения справедливы и для случая, когда нарушение механического равновесия совершается путем небольшого опускания какой-либо массы воздуха. В этом случае опустившаяся масса сжимается внешним давлением. Если в новом положении ее плотность меньше плотности окружающего воздуха, то она начнет подниматься, и равновесие восстановится. Наоборот, если эта плотность окажется больше, то рассматриваемая масса начнет опускаться еще ниже, т. е. равновесие окажется неустойчивым. Эти рассуждения, разумеется, применимы не только к атмосфере, но и к любой неравномерно нагретой сжимаемой жидкости, находящейся в механическом равновесии в поле тяжести. Что касается земной атмосферы, то исследования показали, что изотермическая атмосфера в рассматриваемом смысле устойчива. Еще большая устойчивость получается, когда температура воздуха возрастает с высотой. Если же температура убывает с высотой, то механическое равновесие воздуха возможно лишь тогда, когда это убывание происходит не слишком быстро. При убывании температуры с высотой более чем на один градус на каждые 100 метров высоты атмосфера теряет механическую устойчивость. Появляются восходящие и нисходящие потоки воздуха (конвекция). Во втором томе эти вопросы будут рассмотрены более подробно.

ЗАДАЧА

На какую высоту $H_{1/2}$ надо подняться, чтобы давление (изотермической) атмосферы уменьшилось в 2 раза?

Ответ. $H_{1/2} = h \ln 2 \approx 5{,}53$ км (при 0 °С).