времени t_2 можно выбрать произвольно, то отсюда следует, что траектория частицы A является также линией тока.

3. Возьмем произвольный замкнутый контур C и через каждую точку его в один и тот же момент времени проведем линии тока (рис. 238). Они расположатся на некоторой трубчатой поверхности, называемой *трубкой тока.* Так как скорости частиц жидкости направлены по касательным к линиям тока, то при течении жидкость не может пересекать боковую поверхность трубки тока. Трубка тока ведет себя подобно боковой поверхности жесткой трубки, вдоль которой течет жидкость. На такие трубки тока можно разбить все пространство, занимаемое жидкостью. Если поперечное сечение трубки тока бесконечно мало, то можно считать, что скорость жидкости одна и та же во всех точках одного и того же поперечного сечения и направлена вдоль оси трубки тока. Масса жидкости, протекающая за время dt через поперечное сечение трубки, определяется выражением

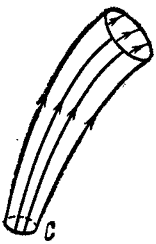


Рис. 238.

$$dm = \rho v S\, dt, \tag{93.1}$$

где ρ — плотность жидкости, а S — площадь (нормального) поперечного сечения трубки.

В случае стационарного течения масса dm будет одной и той же для всех сечений трубки тока. Если взять два сечения, площади которых равны S_1 и S_2, то можно написать

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \tag{93.2}$$

Если бы это равенство не соблюдалось, то масса жидкости между сечениями S_1 и S_2 изменялась бы во времени. А это противоречит закону сохранения массы и предположению о стационарности течения. Если жидкость несжимаема, то $\rho_1 = \rho_2$, и соотношение (93.2) принимает вид

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}. \tag{93.3}$$

Скорость жидкости в одной и той же трубке тока тем больше, чем у́же поперечное сечение трубки. Она обратно пропорциональна площади этого поперечного сечения.

§ 94. Стационарное движение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли

1. Изучение движения реальных жидкостей и газов, вообще говоря, представляет очень сложную задачу. Для ее упрощения сначала полностью пренебрегают силами внутреннего трения. Рассматривают случай идеальной жидкости, в которой при любых движениях не возникают касательные и нормальные силы внутреннего трения (см. § 89, п. 6). Единственные поверхностные силы, которые могут действовать в идеальной жидкости, — это силы нормального давления P. При этом само давление P однозначно определяется плотностью и температурой жидкости. Для упрощения жидкость считается также несжимаемой.

2. Рассмотрим стационарное течение идеальной жидкости в каком-либо консервативном силовом поле, например в поле силы тяжести. Применим к этому течению закон сохранения энергии. При этом будем полностью пренебрегать теплообменом, который может происходить между частями жидкости с окружающей средой. Выделим в жидкости бесконечно узкую трубку тока и рассмотрим часть жидкости, занимающую объем $MNDC$ (рис. 239). Пусть эта часть переместилась в бесконечно близкое положение $M_1N_1D_1C_1$.

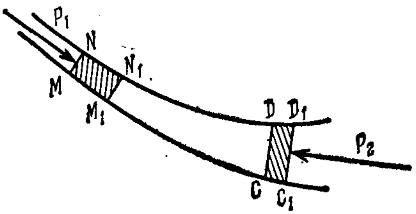


Рис. 239.

Вычислим работу A, совершаемую при этом силами давления. Давление, действующее на боковую поверхность трубки тока, перпендикулярно к перемещению и работы не совершает. При перемещении границы MN в положение M_1N_1 совершается работа $A_1 = P_1S_1l_1$, где $l_1 = MM_1$ — величина перемещения. Введя объем $\Delta_1 V = S_1l_1$, ее можно представить в виде $A_1 = P_1\Delta V_1$ или $A_1 = P_1\frac{\Delta_1 m}{\rho_1}$, где $\Delta_1 m$ — масса жидкости в объеме MNN_1M_1. При перемещении границы CD в положение C_1D_1 жидкость совершает работу против давления P_2 (или давление P_2 совершает над жидкостью отрицательную работу). Для нее, рассуждая аналогично, найдем $A_2 = P_2\frac{\Delta_2 m}{\rho_2}$, где $\Delta_2 m$ — масса жидкости в объеме CDD_1C_1. Но если движение стационарно, то масса жидкости в объеме M_1N_1DC не изменится, а потому из закона сохранения массы получим $\Delta_1 m = \Delta_2 m$. Опуская индексы у Δm, для работы, совершаемой внешним давлением, окончательно находим

$$A = A_1 - A_2 = \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}\right)\Delta m.$$

Эта работа должна быть равна приращению ΔE полной энергии выделенной части жидкости. Ввиду стационарности течения энергия жидкости в объеме M_1N_1DC не изменилась. Поэтому величина ΔE равна разности энергий массы жидкости Δm в положениях CDD_1C_1 и MNN_1M. Обозначая посредством ε полную энергию, приходящуюся на единицу массы жидкости, находим $\Delta E = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,\Delta m$. Приравнивая эту величину работе A и сокращая на Δm, получаем

$$\varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \varepsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2}. \qquad (94.1)$$

Отсюда следует, что *вдоль одной и той же линии тока при стационарном течении идеальной жидкости величина* $\varepsilon + P/\rho$ *остается постоянной:*

$$\varepsilon + \frac{P}{\rho} = B = \mathrm{const}. \tag{94.2}$$

Это соотношение называется *уравнением Даниила Бернулли* (1700—1782), который впервые опубликовал его в 1738 году. При выводе уравнения Бернулли мы нигде не использовали предположения о несжимаемости жидкости. Поэтому оно справедливо и для сжимаемых жидкостей. Требуется только, чтобы жидкость была идеальной, а течение — стационарным. Однако разбор и применения уравнения Бернулли для сжимаемых жидкостей и газов мы отложим до второго тома, так как это требует знания явного выражения для энергии ε. Здесь ограничимся рассмотрением несжимаемых жидкостей, движущихся в поле тяжести Земли. Именно в этих предположениях уравнение (94.2) было установлено самим Бернулли.

Если жидкость несжимаемая, то при течении не меняется та часть полной энергии ε, которая зависит от сжатия жидкости. Эту часть поэтому можно не принимать во внимание. Вся энергия ε складывается из кинетической энергии единицы массы жидкости $v^2/2$ и ее потенциальной энергии gh в поле тяжести. В этом случае уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = B = \mathrm{const}. \tag{94.3}$$

3. Подчеркнем еще раз, что постоянная Бернулли B одна и та же *вдоль одной и той же линии тока*. Однако она, вообще говоря, может меняться при переходе от одной линии тока к другой. Но могут быть и такие случаи, когда постоянная Бернулли одна и та же для всего потока жидкости. Отметим один, довольно часто встречающийся случай, когда это имеет место. Допустим, что все линии тока начинаются или оканчиваются в такой области, где жидкость практически находится в состоянии покоя. Возьмем одну из точек линии тока в такой области. Тогда в уравнении (94.3) следует положить $v = 0$, и мы получим $B = gh + P/\rho$. Но во всей области, где жидкость покоится, соблюдается условие равновесия $gh + P/\rho = \mathrm{const}$. Отсюда и видно, что постоянная Бернулли B в рассматриваемом случае одна и та же для всего потока жидкости. Более общим является случай, когда в некоторой области пространства несжимаемая идеальная жидкость движется параллельным потоком в любом направлении с постоянной скоростью v_0, а затем параллельность потока нарушается препятствиями, стоящими на его пути, или вследствие расширений или сужений трубы или русла, по которым течет жидкость. В этом случае постоянная Бернулли B также одинакова для всех линий тока. Чтобы убедиться в этом,

достаточно перейти к системе отсчета, равномерно движущейся относительно исходной со скоростью v_0.

4. Допустим теперь, что тонкая трубка тока имеет переменное поперечное сечение, а ось ее горизонтальна. (Примером может служить горизонтальная труба переменного сечения, по которой течет жидкость). Тогда $h = \text{const}$, и уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{const}. \tag{94.4}$$

Отсюда видно, что давление больше там, где меньше скорость v, и наоборот. С другой стороны, согласно соотношению (93.3), скорость v минимальна там, где максимально сечение трубки. Значит, в широких частях трубки давление максимально, а в узких — минимально. Такой результат является непосредственным следствием второго закона Ньютона. Действительно, когда жидкость из широкой части течет в узкую (рис. 240), то скорость ее возрастает. Значит, ускорение направлено в сторону течения, т. е. на рис. 240 слева направо. Это ускорение сообщается разностью давлений, действующих на рассматриваемую часть жидкости слева и справа. Следовательно, давление слева, т. е. в более широкой части трубки, должно быть больше, чем справа, где трубка у́же.

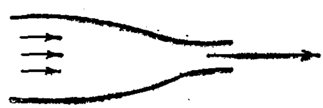


Рис. 240.

5. Пользуясь уравнением (94.4), можно дать ответ на вопрос, когда при течении жидкость или газ можно считать несжимаемыми, хотя более строгое доказательство должно основываться на уравнении Бернулли в более общей форме (94.2). Давление и скорость течения в двух точках 1 и 2 на одной и той же линии тока связаны соотношением

$$\Delta P \equiv P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2).$$

С другой стороны,

$$\Delta\rho = \frac{d\rho}{dP}\Delta P = \frac{1}{c^2}\Delta P,$$

где c — скорость звука (см. § 85, п. 1). Для того чтобы при течении жидкость можно было рассматривать как несжимаемую, необходимо выполнение соотношения $|\Delta\rho| \ll \rho$ при любом выборе точек 1 и 2. Это приводит к условию

$$|v_2^2 - v_1^2| \ll c^2, \tag{94.5}$$

т. е. изменение квадрата скорости течения жидкости должно быть мало по сравнению с квадратом скорости звука. Если течение отнести к системе отсчета, в которой жидкость в какой-либо точке покоится, то условие (94.5) упрощается и принимает вид

$$v^2 \ll c^2, \tag{94.6}$$

т. е. во всем потоке квадрат скорости течения должен быть малым по сравнению с квадратом скорости звука.

Если при течении меняется высота h, то с помощью уравнения (94.3) нетрудно показать, что помимо (94.5) требуется дополнительное условие

$$g\Delta h \ll c^2, \qquad (94.7)$$

выполнение которого необходимо, чтобы жидкость или газ могли рассматриваться как несжимаемые.

6. Опишем несколько опытов для иллюстрации уравнения Бернулли. На рис. 241 изображена труба переменного сечения, через которую пропускается воздух. О давлении воздуха в трубе можно судить по уровням воды в стеклянных манометрических трубках, соединенных с ней, как показано на рис. 241. Оказывается, что в трубках, соединенных с узкими частями трубы, вода поднимается выше, а соединенных с широкими частями — ниже. Значит, в первом случае давление воздуха в потоке меньше, чем во втором. Так и должно быть согласно уравнению (94.4).

Эта демонстрация может служить для пояснения идеи *водомера*, служащего для измерения *расхода воды*, т. е. массы воды Q, протекающей ежесекундно через поперечное сечение трубы. В трубу вставляется короткий участок (*трубка*

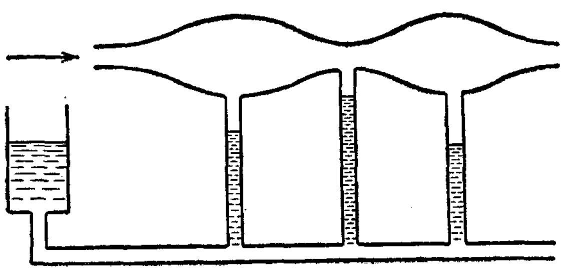


Рис. 241.

Вентури) с меньшим поперечным сечением. Пусть S_1 и S_2 — площади поперечных сечений широкого и узкого участков трубы, а P_1 и P_2 — давления воды в них, измеряемые с помощью манометров. Тогда по уравнению Бернулли

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}.$$

Кроме того, $M_1 = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2$. Определив отсюда v_1 и v_2 и вставив в предыдущее соотношение, получим

$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\rho (P_1 - P_2)}{S_1^2 - S_2^2}}. \qquad (94.8)$$

7. Возьмем резиновую трубку, надетую на суживающийся стеклянный наконечник, и будем продувать через нее воздух (рис. 242, вид сверху). Давление воздуха в узкой части наконечника и в выходящей из него струе будет меньше атмосферного. Поднесем струю сбоку к легкому полому целлулоидному шарику, подвешенному на нити. Шарик втягивается в струю, а затем увлекается ею. Если струю направить вертикально вверх, то втянувшийся в нее шарик можно удерживать в равновесии на определенной высоте. Он ведет себя подобно шарику, помещенному в яму. Привязывать шарик к нити в этом опыте не требуется.

8. Поднесем теперь струю воздуха к верхнему концу стеклянной трубки, нижний конец которой погружен в воду, а верхний оканчивается узким наконечником (рис. 243, *а*). Вода в стеклянной трубке будет подниматься, разбрызгиваться и увлекаться струей воздуха. На этом принципе основано устройство *пульверизатора*. Если трубка, по которой продувается воздух, не снабжена узким наконечником, а имеет постоянное поперечное сечение (рис. 243, *б*), то поднятие воды и разбрызгивание не происходит. Если, однако, такую трубку поднести вплотную к наконечнику трубки, погруженной в воду, так, чтобы между ними образовался узкий зазор (рис. 243, *в*), то вода опять поднимается и разбрызгивается. Зазор между трубками выполняет роль узкого наконечника, понижающего давление воздуха в струе.

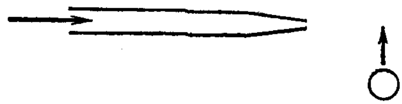
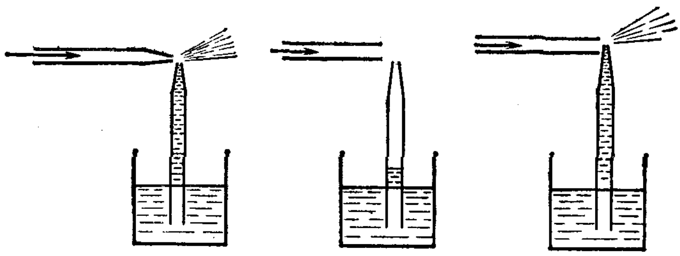


Рис. 242.

9. Если два слегка изогнутых листа твердой бумаги подвесить на горизонтальных проволоках (рис. 244) и продувать между ними воздух, то они притягиваются друг к другу. Дело в том, что давление воздуха P между листами в наи-



а) б) в)

Рис. 243.

более узком месте становится меньше атмосферного P_0, и наружное атмосферное давление прижимает листы друг к другу. Можно также подвесить на небольшом расстоянии друг от друга две стеклянные колбы. При продувании воздуха между ними колбы начинают стучать, сталкиваясь друг с другом. Притяжение такого же типа наблюдается между двумя кораблями, когда они идут параллельным курсом на небольшом расстоянии друг от друга. Это легко объяснить, если перейти в систему отсчета,

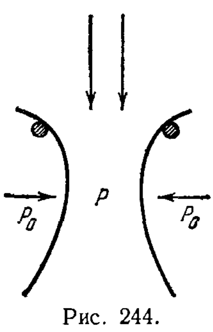


Рис. 244.

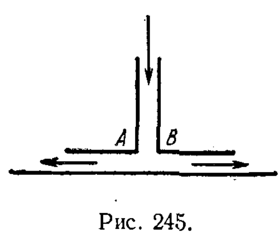


Рис. 245.

в которой корабли покоятся, а вода течет между ними. Описанное явление не раз было причиной столкновения судов и приводило к авариям.

10. На рис. 245 схематически изображен *прибор Клемана* (ум. 1841) *и Дезорма* (1777—1862). Он состоит из латунного диска с отверстием в центре, к краям

которого приделана латунная трубка. На эту трубку надета резиновая трубка, через которую продувается воздух. Если диск поднести к листу бумаги, лежащему на столе, то лист притянется диском. Дело в том, что в узком зазоре между диском и листом бумаги образуется расходящийся от центра к краям поток воздуха. Давление в этом зазоре понижается, и лист бумаги прижимается к диску давлением наружного воздуха. Прижатый лист закрывает отверстие AB, течение воздуха через трубку затормаживается, давление его повышается, и снова появляется зазор, через который устремляется поток воздуха. Лист бумаги опять притягивается к диску и все повторяется, пока не прекратится дутье. В результате бумажный лист приходит в быстрые колебания, издавая звук.

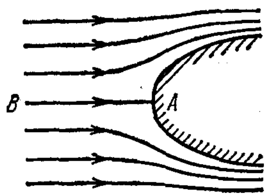


Рис. 246.

11. Допустим, что поток жидкости обтекает какое-либо тело (рис. 246). От точки A линии тока расходятся в стороны. В точке A, называемой *критической*, скорость жидкости обращается в нуль, в ней линия тока обрывается. Применяя уравнение Бернулли к линии тока BA, получим

$$P+\frac{\rho v^2}{2}=P_0, \tag{94.9}$$

где P_0 — давление в критической точке, а P — на «бесконечности», откуда жидкость течет. Величина P_0 — это максимальное давление, которое может иметь жидкость на рассматриваемой линии тока. От наличия силы тяжести мы отвлекаемся, предполагая, что все линии тока плоские и лежат в горизонтальных плоскостях. Величина $^1/_2\,\rho v^2$ называется *динамическим* или *скоростным напором*, а сумма $P+{}^1/_2\,\rho v^2$ — *полным напором* жидкости на рассматриваемой линии тока *). Если измерить в отдельности полный и скоростной напор жидкости в рассматриваемой точке пространства, то по ним легко вычислить и скорость жидкости в той же точке.

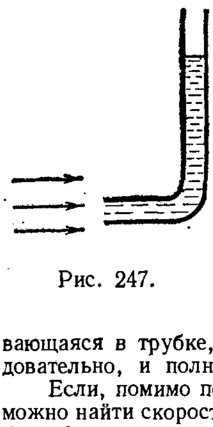


Рис. 247.

Для измерения полного напора используется *трубка Пито* (1695—1771). Это небольшая изогнутая манометрическая трубка, обращенная открытым концом навстречу потоку жидкости (рис. 247). Приосевые линии тока, направленные к трубке Пито, заканчиваются внутри трубки, где жидкость покоится. Высота столба жидкости, устанавливающаяся в трубке, является поэтому мерой максимального давления, а следовательно, и полного напора жидкости на рассматриваемой линии тока.

Если, помимо полного напора, измерить еще давление P, то по их разности можно найти скоростной напор $^1/_2\rho v^2$, а затем вычислить скорость v. Измерение P было бы излишним, если бы речь шла о нахождении скорости v, например, в реке, где жидкость имеет открытую поверхность. В этом случае глубина погружения трубки Пито непосредственно давала бы величину искомого давления. Но этот способ не годится, когда жидкость течет, например, в трубе. Он не годится также для измерения скоростей самолетов и т. д. В таких случаях для измерения давления P можно воспользоваться *зондом*. Зонд отличается от трубки Пито тем, что

---

*) В технической гидродинамике обычно применяется следующая терминология. Величину P называют *статическим давлением*, $^1/_2\,\rho v^2$ — *динамическим давлением*, а сумму $P+{}^1/_2\,\rho v^2$ — *полным давлением*. Однако эта терминология, как неоднократно отмечалось многими физиками, нерациональна и может только ввести в заблуждение. Ею мы пользоваться не будем. В жидкости есть лишь единственное давление, которое обусловлено степенью ее сжатия, и таковым является величина P.

его передняя часть, обращенная навстречу потоку, запаяна, а в боковой стенке имеется небольшое отверстие, как показано на рис. 248. Трубка зонда сильно искажает поток только в непосредственной близости от ее переднего конца, обращенного к потоку. Поток, обтекающий боковую поверхность трубки, практически остается неискаженным. Поэтому в непосредственной близости от отвер-

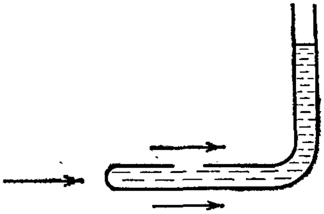


Рис. 248.

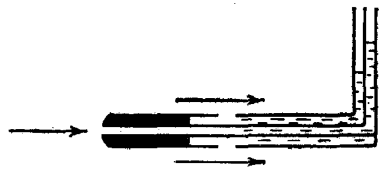


Рис. 249.

стия скорость, а с ней и давление жидкости такие же, как и во всех точках линии тока, проходящей вблизи отверстия. Давление в трубке зонда, измеряемое манометром, таким образом, совпадает с давлением обтекающей ее жидкости P. На практике трубку Пито обычно монтируют вместе с зондом, например, так, как изображено в разрезе на рис. 249. Такая трубка называется *трубкой Прандтля* (1875—1953). Принцип ее действия ясен из рисунка.

§ 95. Примеры на применение уравнения Бернулли. Формула Торричелли

1. Рассмотрим истечение идеальной несжимаемой жидкости через малое отверстие в боковой стенке или дне широкого сосуда. Частицы жидкости подходят к отверстию, имея скорости в поперечных направлениях (рис. 250). Из-за инерции это приводит к *сжатию*

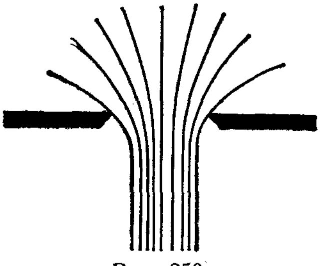


Рис. 250.

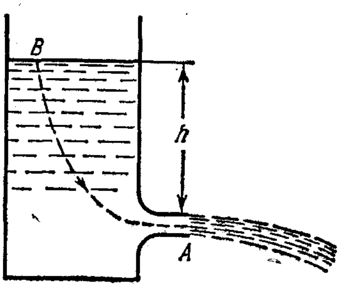


Рис. 251.

вытекающей струи. Во избежание этого будем предполагать, что истечение происходит через трубку с закругленными краями (рис. 251). Благодаря этому линии тока перед истечением постепенно меняют направление на параллельное оси трубки, и сжатия струи не возникает *). Все линии тока проходят через трубку, начинаясь

*) Это не совсем так, так как остается некоторое сжатие, обусловленное силами поверхностного натяжения.