его передняя часть, обращенная навстречу потоку, запаяна, а в боковой стенке имеется небольшое отверстие, как показано на рис. 248. Трубка зонда сильно искажает поток только в непосредственной близости от ее переднего конца, обращенного к потоку. Поток, обтекающий боковую поверхность трубки, практически остается неискаженным. Поэтому в непосредственной близости от отвер-

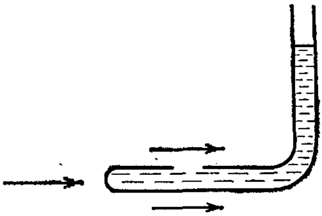

Рис. 248.

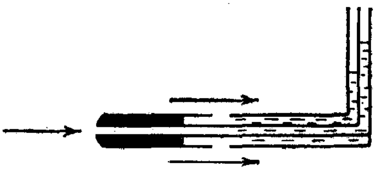

Рис. 249.

стия скорость, а с ней и давление жидкости такие же, как и во всех точках линии тока, проходящей вблизи отверстия. Давление в трубке зонда, измеряемое манометром, таким образом, совпадает с давлением обтекающей ее жидкости P. На практике трубку Пито обычно монтируют вместе с зондом, например, так, как изображено в разрезе на рис. 249. Такая трубка называется *трубкой Прандтля* (1875—1953). Принцип ее действия ясен из рисунка.

§ 95. Примеры на применение уравнения Бернулли. Формула Торричелли

1. Рассмотрим истечение идеальной несжимаемой жидкости через малое отверстие в боковой стенке или дне широкого сосуда. Частицы жидкости подходят к отверстию, имея скорости в поперечных направлениях (рис. 250). Из-за инерции это приводит к *сжатию*

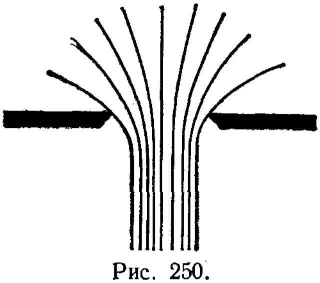

Рис. 250.

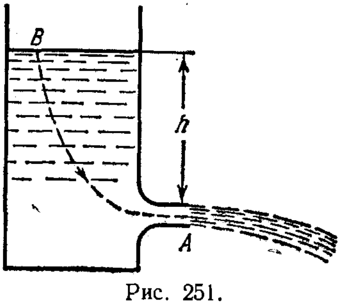

Рис. 251.

вытекающей струи. Во избежание этого будем предполагать, что истечение происходит через трубку с закругленными краями (рис. 251). Благодаря этому линии тока перед истечением постепенно меняют направление на параллельное оси трубки, и сжатия струи не возникает *). Все линии тока проходят через трубку, начинаясь

*) Это не совсем так, так как остается некоторое сжатие, обусловленное силами поверхностного натяжения.

вблизи свободной поверхности жидкости, где скорость v пренебрежимо мала. Поэтому постоянная Бернулли будет одна и та же у всех линий тока. Применим уравнение Бернулли к точкам B и A какой-либо линии тока (рис. 251). В точке B скорость пренебрежимо мала, ее можно считать равной нулю, скорость в точке A обозначим v. Уравнение Бернулли дает

$$\frac{P_0}{\rho}+gh=\frac{P_0}{\rho}+\frac{v^2}{2},$$

где P_0 — атмосферное давление, а высота h отсчитывается от уровня отверстия. Отсюда получаем

$$v=\sqrt{2gh}. \tag{95.1}$$

Это — *формула Торричелли* (1608—1647). Она показывает, что при истечении жидкость приобретает такую скорость, какую получило бы тело, свободно падающее с высоты h. Поэтому, если изогнуть трубку и направить струю вертикально вверх или под малым углом к вертикали, то в наивысшей своей точке она достигнет уровня жидкости в сосуде. В действительности высота поднятия струи будет несколько меньше из-за трения и сопротивления воздуха, которые при выводе уравнения Бернулли не учитывались.

2. Подсчитаем количество движения, уносимое ежесекундно вытекающей струей. Пусть струя вытекает горизонтально через небольшое отверстие в боковой стенке. Если S — площадь отверстия, то ежесекундно вытекает масса жидкости ρvS. Она уносит количество движения $mv = \rho v^2S$, или в силу (95.1) $mv = 2\rho ghS$. Благодаря этому сосуд с жидкостью получает отдачу $F = 2\rho ghS$. Если отверстие закрыть пробкой, то сосуд будет оставаться на месте. Значит, горизонтальные силы давления жидкости, действующие на боковые стенки сосуда, уравновешиваются. Снова откроем отверстие. Тогда из правой боковой стенки будет удален участок площадью S. Если бы состояние жидкости при этом не изменилось, то сила давления жидкости на правую стенку уменьшилась бы на $PS = \rho ghS$. На самом деле ее уменьшение вдвое больше и составляет $2\rho ghS$. Это объясняется *перераспределением давления,* которое происходит при переходе от состояния покоя жидкости к состоянию установившегося движения. Конечно, этот переход совершается не мгновенно. Если мгновенно удалить пробку, то в первый момент сила давления на правую стенку уменьшится только на ρghS. Затем в процессе установления течения уменьшение давления будет быстро, но непрерывно меняться от ρghS до $2\rho ghS$.

ЗАДАЧИ

1. В вертикально стоящий цилиндрический сосуд налита идеальная жидкость до уровня H (относительно дна сосуда). Площадь дна сосуда равна S. Определить время t, за которое уровень жидкости в сосуде опустится до высоты h

(относительно дна сосуда), если в дне сосуда сделано малое отверстие площади σ. Определить также время T, за которое из сосуда выльется вся жидкость.

Ответ. $t=\frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{H}-\sqrt{h}),\ T=\frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

2. Прямоугольная коробка плавает на поверхности воды, погружаясь под действием собственного веса на глубину h. Площадь дна коробки равна S, высота — H. Через какое время коробка утонет, если в центре дна ее проделать малое отверстие площади σ и с помощью боковых направляющих сохранять неизменной ориентацию коробки.

Ответ. $t=\frac{S}{\sigma}\frac{H-h}{\sqrt{2gh}}$.

3. Через какое время наполнится водой шаровая колба радиуса R, если в центре ее нижнего основания сделано малое отверстие площади σ? Колба погружена в воду до нижнего основания ее горлышка.

Ответ. $t=\frac{16\pi R^2}{15\sigma}\sqrt{\frac{R}{g}}$.

4. На горизонтальной поверхности стола стоит цилиндрический сосуд, в который налита вода до уровня H (относительно поверхности стола). На какой высоте h (относительно поверхности стола) надо сделать малое отверстие в боковой стенке сосуда, чтобы струя воды встречала поверхность стола на максимальном расстоянии от сосуда? Вычислить это расстояние, $x_{\text{макс}}$.

Ответ. $h=\frac{H}{2}$, $x_{\text{макс}}=H$.

5. Определить форму сосуда, чтобы уровень жидкости в нем опускался с постоянной скоростью, если в центральной точке дна проделать малое отверстие.

Ответ. Площадь горизонтального поперечного сечения сосуда должна быть пропорциональна квадратному корню из расстояния этого сечения от отверстия. Если сосуд обладает осевой симметрией, то он должен иметь форму параболоида вращения четвертого порядка.

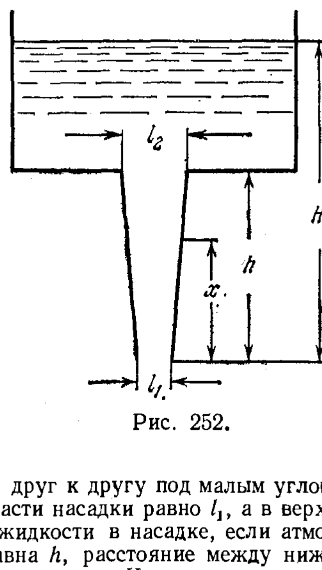

Рис. 252.

6. В широкий сосуд с плоским дном налита идеальная жидкость. В дне сосуда сделана длинная и узкая щель, в которую вставлена насадка, образованная двумя плоскостями, наклоненными друг к другу под малым углом (рис. 252). Расстояние между ними в нижней части насадки равно l_1, а в верхней — l_2. Определить распределение давления жидкости в насадке, если атмосферное давление равно P_0. Длина насадки равна h, расстояние между нижним концом насадки и уровнем жидкости в сосуде равно H.

Ответ. $P=P_0-\rho gx+\rho gH\left\{1-\frac{h^2l_1^2}{[hl_1+x(l_2-l_1)]^2}\right\}$, где x — расстояние по вертикали от нижнего конца насадки.

7. Вода вытекает из широкого резервуара через вертикальную коническую трубу, вставленную в его дно. Длина трубы равна l, диаметр верхнего основания d_1, нижнего основания d_2 $(d_1>d_2)$. При каком уровне H воды в резервуаре давление в верхнем сечении трубы будет равно P, если атмосферное давление равно P_0?

Ответ. $H=\frac{(P_0-P)/\rho g-l\,(d_2/d_1)^4}{1-(d_2/d_1)^4}$.

8. Определить скорость стационарного истечения через малое отверстие струи идеальной несжимаемой жидкости, находящейся под давлением в закрытом сосуде (рис. 253).

Ответ. $v=\sqrt{2(P-P_0)/\rho+2gh}$, где P_0 — атмосферное давление.

9. Для того чтобы струя жидкости вытекала из сосуда с постоянной скоростью, применяют устройство, изображенное на рис. 254. Определить скорость истечения струи v в этом случае.

Ответ. Пока уровень жидкости в сосуде выше нижнего конца трубки AB, скорость истечения постоянна и равна $v=\sqrt{2gh}$. После этого скорость истечения начнет уменьшаться.

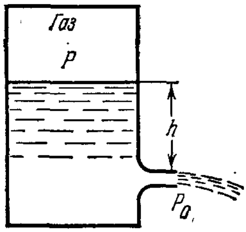

Рис. 253.

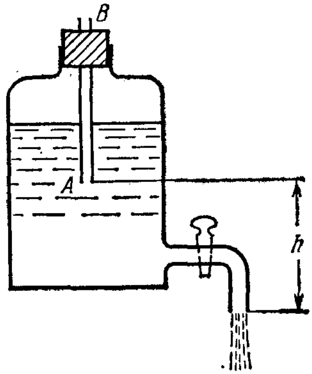

Рис. 254.

10. Цилиндрический сосуд с налитой в него идеальной несжимаемой жидкостью вращается вокруг своей геометрической оси, направленной вертикально, с угловой скоростью ω. Определить скорость истечения струи жидкости через малое отверстие в боковой стенке сосуда при установившемся движении жидкости (относительно сосуда).

Решение. Перейдем в систему отсчета, в которой жидкость покоится. В ней добавятся две силы инерции; центробежная и кориолисова. Кориолисова сила не совершает работы. Она лишь искривляет линии тока, но не сказывается на справедливости и форме общего уравнения Бернулли (94.2). Центробежная сила добавляет новый член к потенциальной энергии. Полная потенциальная энергия единицы массы жидкости будет $u=gz-{}^1/_2\omega^2r^2$, так что уравнение (94.2) запишется в виде

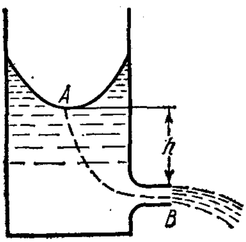

Рис. 255.

$$\frac{v^2}{2}+gz-\frac{1}{2}\omega^2r^2+\frac{P}{\rho}=B=\text{const}, \tag{95.2}$$

где v — относительная скорость жидкости (т. е. скорость относительно вращающейся системы отсчета). Постоянная Бернулли B одна и та же для всех линий тока, поскольку все они начинаются вблизи поверхности жидкости, где скорость v пренебрежимо мала. Применим уравнение (95.2) к линии тока AB, начинающейся на поверхности жидкости в точке A (рис. 255). Если начало координат поместить в точке A, то $z_A=r_A=v_A=0$, $P_A=P_B=P_0$, $v_B=v$, $z_B=-h$, $r_B=R$, и мы получим

$$v=\sqrt{2(gh+\omega^2R^2)}. \tag{95.3}$$

Здесь h означает высоту наиболее низкой (центральной) точки A уровня жидкости относительно отверстия, а R — радиус цилиндра. Переход к неподвижной системе отсчета не представляет затруднений.