§ 96. Вязкость

1. В реальных жидкостях, помимо сил нормального давления, на границах движущихся элементов жидкости действуют еще *касательные силы внутреннего трения*, или *вязкости*. Убедиться в существовании таких сил можно на простейших примерах. Так, уравнение Бернулли, выводимое в предположении, что силы вязкости отсутствуют, приводит к следующему результату. Если жидкость течет по горизонтальной прямолинейной трубе постоянного поперечного сечения, то при стационарном течении давление жидкости одно и то же по всей длине трубы. В действительности давление жидкости в трубе падает в направлении ее течения. Для стационарности течения на концах трубы надо поддерживать постоянную разность давлений, уравновешивающую силы внутреннего трения, возникающие при течении жидкости.

Другим примером может служить поведение жидкости во вращающемся сосуде. Если вертикальный цилиндрический сосуд, наполненный жидкостью, привести в равномерное вращение вокруг своей оси, то жидкость постепенно также приходит во вращение. Сначала начинают вращаться слои жидкости, прилегающие к стенкам сосуда. Затем вращение передается внутренним слоям, пока вся жидкость не начнет вращаться равномерно, как твердое тело. Таким образом, пока движение не установилось, происходит непрерывная передача вращения от сосуда к жидкости, а также от наружных слоев жидкости к внутренним. Такая передача вращения была бы невозможна, если бы не существовало касательных сил, действующих между жидкостью и стенкой сосуда, а также между слоями самой жидкости, вращающимися с различными угловыми скоростями. Эти касательные силы называются *силами трения* — *внутреннего*, если они действуют между слоями самой жидкости, и *внешнего*, если это силы взаимодействия между жидкостью и стенкой сосуда. Наибольший интерес представляют силы внутреннего трения, называемые также *силами вязкости*. Вопрос о происхождении внутреннего трения здесь мы оставляем открытым. Этим вопросом мы займемся в томе II при изучении молекулярной физики.

2. Для нахождения количественных законов внутреннего трения лучше всего начать с простейшего примера. Рассмотрим две параллельные бесконечно длинные пластинки, между которыми находится слой жидкости. (Пластинки считаются бесконечными, если их длина и ширина значительно больше расстояния между ними.) Нижняя пластинка AB неподвижна, а верхняя CD движется относительно нее с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_0$ (рис. 256). Оказывается, что для поддержания равномерного движения пластинки CD к ней надо приложить постоянную силу $\boldsymbol{F}$, направленную в сторону движения. На пластинку AB должна действовать такая же, но противоположно направленная сила, чтобы удержать эту пластинку в покое.

Величина силы F, как экспериментально было установлено еще Ньютоном, пропорциональна скорости v_0, площади пластинки S и обратно пропорциональна расстоянию h между пластинками:

$$F=\eta S\frac{v_0}{h}. \tag{96.1}$$

Здесь η — постоянная, называемая *коэффициентом внутреннего трения* или *вязкости жидкости* (сокращенно ее называют просто *вязкостью*). Она не зависит от материала пластинок и имеет разные значения для различных жидкостей. Для данной жидкости коэффициент η зависит от параметров, характеризующих ее внутреннее состояние, и в первую очередь от температуры.

Не обязательно, чтобы пластинка AB покоилась. Обе пластинки могут двигаться равномерно параллельно друг другу. Если скорость пластинки AB равна v_1, а пластинки CD — v_2, то вместо (96.1) можно написать более общую формулу

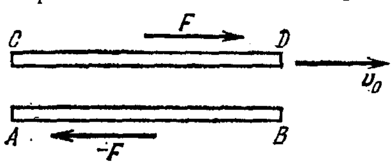

Рис. 256.

$$F=\eta S\frac{v_2-v_1}{h}. \tag{96.2}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти в систему отсчета, в которой пластинка AB покоится.

Заметим далее, что при равномерном движении пластинки CD жидкость должна действовать на нее с силой $-\boldsymbol{F}$, чтобы полная сила, приложенная к пластинке CD, обращалась в нуль. Значит, сама пластинка CD будет действовать на жидкость с силой $+\boldsymbol{F}$. Аналогично пластинка AB будет действовать на жидкость с силой $-\boldsymbol{F}$. Кроме того, исследования показали, что жидкость, обладающая вязкостью, прилипает к поверхности твердого тела, которое она обтекает. Иными словами, скорости частиц жидкости относительно поверхности твердого тела, на которой они находятся, равны нулю. Поэтому в формуле (96.2) силы $\boldsymbol{F}$ и $-\boldsymbol{F}$ можно считать приложенными не к пластинке, а к границам заключенного между ними слоя жидкости. Точно так же v_1 и v_2 можно отождествить со скоростями движения тех же границ жидкого слоя. Тем самым при введении понятия коэффициента вязкости надобность в пластинках отпадает.

3. В целях обобщения формулы (96.2) допустим, что жидкость течет в направлении оси X, причем скорость течения зависит только от координаты y:

$$v_x=v_x(y), \qquad v_y=v_z=0.$$

Вырежем мысленно жидкий слой, ограниченный бесконечно близкими плоскостями, перпендикулярными к оси Y. Пусть эти плоскости пересекают ось Y в точках с ординатами y и $y+dy$ (рис. 257).

Обозначим τ_{yx} касательную силу, действующую на единицу площади верхней границы такого слоя со стороны вышележащей жидкости. Первый индекс y указывает направление внешней нормали к верхней границе слоя, а второй индекс x — направление действующей силы (ср. § 74, п. 2). Обобщая формулу (96.2), для касательного напряжения τ_{yx} напишем

$$\tau_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{96.3}$$

Примем в согласии с опытом, что формула (96.3) справедлива не только для равномерного течения, но и для течения, скорость v_x которого зависит от времени. Касательное напряжение на нижней границе слоя τ_{-yx} направлено в сторону, противоположную τ_{yx}. Оно отличается от τ_{-yx} бесконечно мало ввиду бесконечной малости толщины слоя dy $(\tau_{yx} = -\tau_{-yx})$.

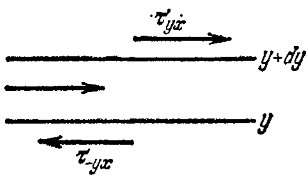

Рис. 257.

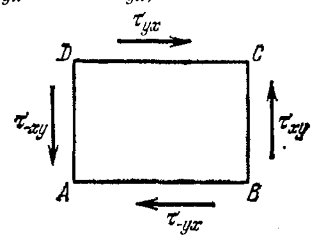

Рис. 258.

4. Выделим теперь в том же параллельном потоке жидкости бесконечно малый параллелепипед $ABCD$ с ребрами, параллельными координатным осям (рис. 258). Тензор напряжений, как следует из уравнения моментов, симметричен (см. § 74, п. 4). Поэтому на основаниях параллелепипеда BC и AD, перпендикулярных к потоку, должны также существовать касательные напряжения, причем $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$. Таким образом, *касательные напряжения действуют не только в плоскостях, параллельных течению, но и в плоскостях, перпендикулярных ему.*

Допустим теперь, что жидкость течет не параллельным потоком, а произвольным образом. Примем, что касательные составляющие тензора вязких напряжений зависят только от скоростей деформаций жидкости, а не от самих деформаций и их высших производных по времени. Ограничимся *линейным приближением,* т. е. будем пренебрегать квадратами и высшими степенями скоростей деформаций. В этом приближении касательные напряжения являются *линейными однородными функциями* скоростей деформаций $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_y}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial z}$, $\frac{\partial v_z}{\partial y}$, $\frac{\partial v_z}{\partial x}$, $\frac{\partial v_x}{\partial z}$. Если бы из этих шести производных на границе CD была отлична от нуля только производная $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, то вдоль оси X на этой границе действовало бы касательное напряжение $\tau'_{yx}=\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}$. Если бы отличалась от нуля только производная $\frac{\partial v_y}{\partial x}$, то касательное напряжение имело бы то же направление и было равно $\tau''_{yx}=\eta\frac{\partial v_y}{\partial x}$. А если отличны от нуля обе производные $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ и $\frac{\partial v_y}{\partial x}$, то касательное напряжение на границе CD будет $\tau_{yx}=$ $=\tau'_{yx}+\tau''_{yx}=\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$. Это непосредственно следует из предположения о линейной однородной зависимости между касательными напряжениями и скоростями деформаций жидкости. Отсюда же следует, что найденное выражение для τ_{yx} сохранит свою силу, каковы бы ни были значения других производных $\frac{\partial v_y}{\partial z}$, $\frac{\partial v_z}{\partial y}$ и т. д. Рассуждая аналогично, найдем выражения и для всех остальных касательных напряжений, действующих на гранях параллелепипеда $ABCD$. Именно

$$\begin{aligned}\tau_{xy}&=\tau_{yx}=\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right),\\ \tau_{yz}&=\tau_{zy}=\eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right),\\ \tau_{zx}&=\tau_{xz}=\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right).\end{aligned} \tag{96.4}$$

Если жидкость несжимаема, то этих выражений достаточно для вывода дифференциальных уравнений движения жидкости. Если же жидкость сжимаема, то к ним надо добавить еще выражения для нормальных напряжений. Мы не будем приводить здесь эти выражения, так как они нам не понадобятся.

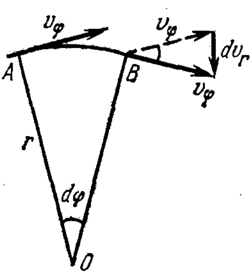

Рис. 259.

5. Рассмотрим частный случай, когда вязкая жидкость вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω. Линии тока имеют форму окружностей. Пусть AB — бесконечно малый участок линии тока длины $r\,d\varphi$ (рис. 259). Касательное напряжение на цилиндрической поверхности, на которой лежит этот участок, очевидно, направлено в сторону вращения. Его следует обозначить посредством $\tau_{r\varphi}$. Первый индекс r указывает направление внешней нормали к цилиндрической поверхности, второй индекс φ — положительное направление касательного напряжения. В рассматриваемом случае роль dy играет dr, роль dx — длина дуги $AB=r\,d\varphi$. Поэтому из (96.4) для касательного напряжения $\tau_{r\varphi}$ получаем

$$\tau_{r\varphi}=\eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{r\,\partial\varphi}\right).$$

В точке A радиальная составляющая скорости v равна нулю. В точке B появляется составляющая скорости вдоль радиуса OA, равная $dv_r = -v_\varphi d\varphi$, так что $\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = -v_\varphi$, а потому

$$\tau_{r\varphi} = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right). \tag{96.5}$$

Подставляя сюда $v_\varphi = \omega r$, получим

$$\tau_{r\varphi} = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial r}. \tag{96.6}$$

Вязкие напряжения исчезают, если $\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$, т. е. если жидкость вращается как целое, подобно твердому телу. Этого не получилось бы, если бы в формуле

$$\tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \tag{96.7}$$

не было учтено второе слагаемое.

6. В качестве примера на применение формулы (96.5) рассмотрим установившееся движение жидкости между двумя равномерно вращающимися коаксиальными цилиндрами. Пусть l — высота цилиндров, R_1 и R_2 — их радиусы, а Ω_1 и Ω_2 — угловые скорости. Величину l будем предполагать очень большой по сравнению с толщиной зазора $R_2 - R_1$ между цилиндрами. Тогда цилиндры можно считать бесконечно длинными и отвлечься от осложняющих обстоятельств, вносимых их краями. Проведем в жидкости произвольную цилиндрическую поверхность радиуса r (рис. 260). Момент сил вязкости, действующих на этой поверхности, относительно оси вращения равен

$$M = 2\pi r^2 l \tau_{r\varphi} = 2\pi\eta l r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r}.$$

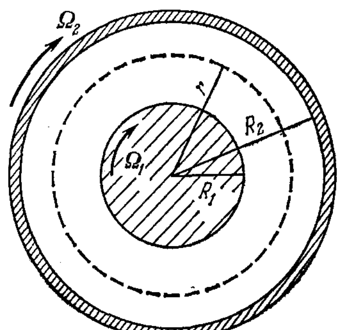

Рис. 260.

При установившемся вращении жидкости этот момент не должен зависеть от радиуса r. Только при этом условии момент сил, действующих на жидкость, заключенную между двумя любыми коаксиальными цилиндрическими поверхностями, обращается в нуль, а момент количества движения жидкости сохраняется. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} = \text{const}.$$

Обозначая входящую сюда постоянную $-2A$ и интегрируя, получим

$$\omega = \frac{A}{r^2} + C,$$

где C — постоянная интегрирования. Постоянные A и C определятся из граничных условий. Так как вязкая жидкость прилипает к поверхности тела, которое она обтекает, то угловая скорость ω при $r = R_1$ должна обращаться в Ω_1, а при $r = R_2$ — в Ω_2. Это приводит к двум уравнениям

$$\frac{A}{R_1^2} + C = \Omega_1, \qquad \frac{A}{R_2^2} + C = \Omega_2,$$

решая которые находим

$$A=\frac{R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}(\Omega_1-\Omega_2),\qquad C=\frac{R_2^2\Omega_2-R_1^2\Omega_1}{R_2^2-R_1^2}$$

и далее

$$\omega=\frac{R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\,\frac{\Omega_1-\Omega_2}{r}+\frac{R_2^2\Omega_2-R_1^2\Omega_1}{R_2^2-R_1^2}. \tag{96.8}$$

Момент сил вязкости, действующих на внутренний цилиндр, равен

$$M=2\pi\eta l\,(-2A)=4\pi\eta l\,\frac{R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}(\Omega_2-\Omega_1). \tag{96.9}$$

Формула (96.9) лежит в основе практического метода измерения коэффициентов вязкости жидкостей и газов. Внутренний цилиндр подвешивается в исследуемой жидкости в вертикальном положении на тонкой нити, а наружный приводится в равномерное вращение с угловой скоростью $\Omega_2=\Omega$. Измеряется угол закручивания нити φ, при котором внутренний цилиндр находится в равновесии. Это будет тогда, когда момент вязких напряжений M уравновешивается моментом закрученной нити $f\varphi$, где f — модуль кручения. Коэффициент вязкости рассчитывается по формуле

$$\eta=\frac{f\varphi}{4\pi l}\,\frac{R_2^2-R_1^2}{R_1^2R_2^2\Omega}. \tag{96.10}$$

ЗАДАЧИ

1. Введя локальную систему координат с началом в рассматриваемой точке пространства, убедиться непосредственным дифференцированием, что формула (96.7) при вращении жидкости переходит в формулу (96.5).

Решение. Проведем через рассматриваемую точку пространства A круговую линию тока. Поместим начало локальной системы координат в точку A, направив координатные оси X и Y, как указано на рис. 261. Для координат и компонентов скорости в точке B получим

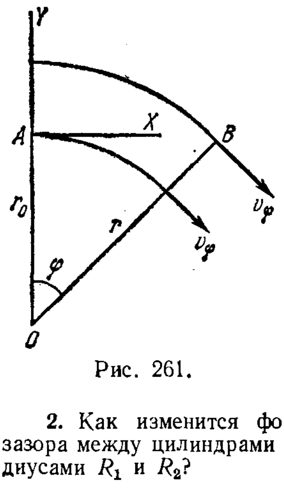

Рис. 261.

$$x=r\sin\varphi,\qquad y=r\cos\varphi-r_0,$$
$$v_x=v_\varphi\cos\varphi,\qquad v_y=-v_\varphi\sin\varphi,$$

где r_0 и r — радиусы-векторы точек A и B, а v_φ — скорость жидкости в точке B. Дифференцируя эти соотношения и полагая в окончательных результатах $\varphi=0$ (точка A), получим в точке A

$$dx=r_0\,d\varphi,\qquad dy=dr,$$
$$dv_x=dv_\varphi,\qquad dv_y=-v_\varphi\,d\varphi.$$

Отсюда

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial v_\varphi}{\partial r},\qquad \frac{\partial v_y}{\partial x}=-\frac{v_\varphi}{r_0}.$$

После подстановки в (96.7) получаем (96.5).

2. Как изменится формула (96.9) в предельном случае, когда толщина зазора между цилиндрами $h=R_2-R_1$ пренебрежимо мала по сравнению с радиусами R_1 и R_2?

Ответ.
$$M=\frac{2\pi\eta lR^3}{h}(\Omega_2-\Omega_1). \tag{96.11}$$

Эту формулу можно также получить, рассматривая слой жидкости между цилиндрами как плоскопараллельный и используя формулу (96.2). Это рекомендуется сделать читателю.