§ 97. Стационарное течение жидкости по прямолинейной трубе. Формула Пуазейля

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость течет вдоль прямолинейной цилиндрической трубы радиуса R. Линии тока параллельны оси трубы. Если выделить произвольную бесконечно узкую трубку тока, то из условия несжимаемости следует, что скорость течения v будет одна и та же вдоль всей трубки тока — скорость жидкости не может меняться вдоль трубы. Но она, конечно, может изменяться с изменением расстояния r от оси трубы. Таким образом, скорость жидкости v является функцией радиуса r.

Примем ось трубы за ось X, направленную в сторону течения. Выделим в трубе произвольную бесконечно короткую цилиндрическую часть длины dx и радиуса r (рис. 262). На ее боковую поверхность в направлении движения действует касательная сила внутреннего трения $dF = 2\pi r\eta \frac{dv}{dr}\, dx$. Кроме того, на основания цилиндра в том же направлении действует сила разности давлений $dF_1 = \pi r^2 [P(x) - P(x+dx)] = -\pi r^2 \frac{dP}{dx}\, dx$.

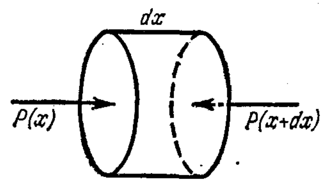

Рис. 262.

При стационарном течении сумма этих двух сил должна обращаться в нуль, а потому

$$2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dP}{dx}.$$

Скорость $v(r)$, а с ней и производная $\frac{dv}{dr}$ не меняются с изменением x. Поэтому должна быть постоянной и производная $\frac{dP}{dx}$, причем эта производная должна быть равна $(P_2 - P_1)/l$, где P_1 — давление на входе трубы, P_2 — на выходе, а l — длина трубы. В результате приходим к уравнению

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r. \tag{97.1}$$

Интегрируя его, получим

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C.$$

Постоянная интегрирования C определится из условия, что на стенке трубы, т. е. при $r = R$ скорость v должна обращаться в нуль. Это дает

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2). \tag{97.2}$$

Скорость v максимальна на оси трубы, где она достигает значения

$$v_0 = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2. \tag{97.3}$$

При удалении от оси скорость v меняется по параболическому закону.

2. Подсчитаем *расход жидкости,* т. е. количество ее, ежесекундно протекающее через поперечное сечение трубы. Масса жидкости, ежесекундно протекающая через кольцевую площадку с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$, равна $dQ = 2\pi r dr \cdot \rho v$. Подставляя сюда выражение для v и интегрируя, находим искомый расход жидкости

$$Q = \pi\rho \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\, dr,$$

или

$$Q = \pi\rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4. \tag{97.4}$$

Расход жидкости пропорционален разности давлений $P_1 - P_2$, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален длине трубы и коэффициенту вязкости жидкости. Эти закономерности были установлены экспериментально и независимо друг от друга в 1839 г. Гагеном и в 1840 г. Пуазейлем (1799—1869). Гаген исследовал движение воды в трубах, Пуазейль — течение жидкостей в капиллярах. Формула (97.4) называется *формулой Пуазейля,* хотя сам Пуазейль и не выводил ее, он исследовал вопрос только экспериментально. На формуле Пуазейля основан один из экспериментальных методов определения коэффициентов вязкости жидкостей.

Формулу (97.4) можно представить в виде $Q = \rho\pi R^2 \cdot v_0/2$. С другой стороны, можно ввести *среднюю скорость потока* $\bar{v}$, определив ее с помощью соотношения $Q = \rho\pi R^2 \bar{v}$. Сравнивая эти два выражения, получаем

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_0. \tag{97.5}$$

Формула Пуазейля справедлива только для *ламинарных течений* жидкости. *Ламинарным* называется такое течение, когда частицы жидкости движутся вдоль прямолинейных траекторий, параллельных оси трубы. (Более общее определение, применимое для любых течений, дается в § 98). При больших скоростях ламинарное течение становится неустойчивым и переходит в *турбулентное течение*, с которым мы познакомимся в § 98. К турбулентным течениям формула Пуазейля неприменима.

3. Кинетическая энергия, ежесекундно переносимая потоком жидкости через поперечное сечение трубы, определяется выражением

$$K = \int_0^R \frac{\rho v^2}{2} \cdot 2\pi r v \, dr.$$

Подставив сюда значение для v и выполнив интегрирование, получим

$$K = \frac{1}{4} Q v_0^2 = Q (\bar{v})^2. \qquad (97.6)$$

Работа, ежесекундно производимая над жидкостью разностью давлений $P_1 - P_2$, определяется выражением $A = \int v (P_1 - P_2) \times \times 2\pi r \, dr$, или

$$A = \frac{P_1 - P_2}{\rho} Q. \qquad (97.7)$$

Такую же по величине, но противоположную по знаку работу производят силы внутреннего трения, так как при стационарном течении кинетическая энергия жидкости остается неизменной: $A' = -A$. С помощью формулы (97.3) можно исключить разность давлений $P_1 - P_2$ и получить

$$A' = -\frac{4\eta v_0 l}{\rho R^2} Q. \qquad (97.8)$$

Полученные формулы позволяют ответить на вопрос, когда при течении жидкости по трубе можно пренебречь силами вязкости и, следовательно, применять уравнение Бернулли. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы потеря кинетической энергии жидкости, обусловленная действием сил вязкости, была пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией самой жидкости, т. е. $|A'| \ll K$. Это приводит к условию

$$\frac{v_0 R^2}{16 \nu l} \gg 1. \qquad (97.9)$$

Здесь буквой ν обозначена так называемая *кинематическая вязкость,* т. е. отношение

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \qquad (97.10)$$

Величину η, когда надо отличать ее от ν, называют *динамической вязкостью.*

4. Законы, установленные Пуазейлем, могут быть в общем виде получены методом размерностей. Достоинство этого метода состоит в том, что он применим к прямолинейным трубам произвольного поперечного сечения, а не только к цилиндрическим трубам. Требуется только, чтобы нормальные поперечные сечения всех труб были геометрически подобны. Эти сечения могут отличаться друг от друга только размерами. Для каждого поперечного сечения можно установить *характерный размер*. За таковой можно принять, например, его периметр или квадратный корень из площади. Можно также поперечные сечения всех труб геометрически подобно рассечь на две части прямолинейными отрезками. Длины таких отрезков тоже могут служить характерными размерами. Например, в случае трубы эллиптического сечения за характерный размер можно взять длину большой или малой оси соответствующего эллиптического сечения. Но можно взять и другие отрезки, характеризующие размеры эллипса. Заданием характерного размера определяются и все прочие размеры поперечного сечения трубы.

При выводе законов Пуазейля, равно как при исследовании любого вопроса методом размерностей, основной пункт состоит в том, чтобы установить физические величины, связанные между собой функциональной зависимостью. При стационарном ламинарном течении жидкости по трубе силы вязкости уравновешиваются градиентами давлений. В уравнения движения входят эти градиенты, а потому разность давлений $P_1 - P_2$ и длина трубы l могут войти только в комбинации $(P_1 - P_2)/l$. Поскольку жидкость движется без ускорения, характер течения не может зависеть от плотности жидкости. Плотность ρ и расход жидкости Q могут войти лишь в комбинации Q/ρ, так как последняя есть чисто геометрическая величина и равна объему жидкости, ежесекундно протекающему через поперечное сечение трубы. Добавив сюда еще вязкость жидкости η и характерный поперечный размер трубы a, получим четыре величины

$$\frac{Q}{\rho}, \quad \frac{P_1 - P_2}{l}, \quad a, \quad \eta,$$

между которыми должна существовать функциональная связь. Вместо a можно взять площадь поперечного сечения трубы S. Применяя общий метод нахождения безразмерных комбинаций (см. § 87, п. 6), нетрудно убедиться, что из рассматриваемых величин можно составить только одну независимую безразмерную комбинацию, а именно

$$\frac{Q}{\rho} \cdot \frac{l}{P_1 - P_2} \cdot \frac{\eta}{S^2}.$$

Следовательно, такая комбинация должна быть постоянной. Обозначая эту постоянную посредством C, получим

$$Q = C\frac{P_1 - P_2}{l\eta}\rho S^2. \qquad (97.11)$$

В этой формуле содержатся все законы Пуазейля. Она является обобщением формулы (97.4) на случай прямолинейных труб произвольного поперечного сечения. Постоянная C зависит от формы поперечного сечения трубы и не может быть определена методами теории размерности. Для ее нахождения необходимо обратиться к опыту или к динамическим методам, т. е. к интегрированию уравнений движения.

ЗАДАЧИ

1. Определить стационарное течение вдоль оси и расход несжимаемой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами с внутренним радиусом R_1, внешним R_2 и длиной l.

Решение. Рассмотрим кольцевой слой жидкости с внутренним радиусом r и внешним $r+dr$. Сила внутреннего трения, действующая на него в направлении течения, равна

$$2\pi l\eta\left[\left(r\frac{dv}{dr}\right)_{r+dr}-\left(r\frac{dv}{dr}\right)_r\right]=2\pi l\eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)dr.$$

(Индексы r и $r+dr$ означают, что величины, заключенные в круглые скобки, должны быть вычислены при значениях радиусов r и $r+dr$ соответственно.) В том же направлении действует сила разности давлений $(P_1-P_2)\,2\pi r\,dr$. При стационарном течении сумма обеих сил обращается в нуль. Это приводит к уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=-\frac{P_1-P_2}{l\eta}r. \tag{97.12}$$

Решение его, обращающееся в нуль при $r=R_1$ и $r=R_2$, есть

$$v=\frac{P_1-P_2}{4l\eta}\left\{R_2^2-r^2+\frac{R_2^2-R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\ln\frac{r}{R_2}\right\}.$$

Расход жидкости:

$$Q=\frac{\pi\rho(P_1-P_2)}{8\eta l}\left\{R_2^4-R_1^4-\frac{(R_2^2-R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)}\right\}.$$

2. Показать, что при ламинарном стационарном течении несжимаемой жидкости вдоль прямолинейной трубы произвольного поперечного сечения и длины l скорость жидкости v удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{P_1-P_2}{l\eta}=0. \tag{97.13}$$

(Координатная плоскость YZ перпендикулярна к оси трубы, оси Y и Z взаимно перпендикулярны и ориентированы произвольно.)

Указание. Взять произвольный бесконечно тонкий прямоугольный параллелепипед жидкости длины l с ребрами, параллельными координатным осям, и написать условие обращения в нуль действующих на него сил вязкости и разности давлений, подобно тому как это делалось при выводе уравнения (97.12).

3. Определить скорость течения и расход жидкости в трубе эллиптического сечения.

Решение. Эта задача относится к типу задач, решаемых *методом угадывания*. Угадывается вид решения дифференциального уравнения (97.13), а затем коэффициенты в этом решении подбираются так, чтобы удовлетворить граничному условию на стенке трубы: $v=0$. Направим координатные оси Y и Z вдоль главных осей нормального эллиптического поперечного сечения трубы и будем искать решение в виде $v=Ay^2+Bz^2+v_0$. Это выражение удовлетворяет уравнению (97.13), если

$$2A+2B=-\frac{P_1-P_2}{l\eta}.$$

На внутренней поверхности эллиптической трубы $v = 0$, т. е. $Ay^2 + Bz^2 + v_0 = 0$. Это уравнение должно переходить в уравнение эллиптического сечения трубы $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$, а потому

$$A = -\frac{v_0}{a^2}, \qquad B = -\frac{v_0}{b^2}.$$

Для определения постоянных A, B, v_0 получилось три линейных уравнения. Решая их, находим

$$v_0 = \frac{P_1 - P_2}{2l\eta} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \tag{97.14}$$

$$v = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right). \tag{97.15}$$

Постоянная v_0 есть, очевидно, скорость течения на оси трубы.

Вычислим теперь расход жидкости. Поверхности, на которых скорость v постоянна, суть эллиптические цилиндры

$$\frac{y^2}{a'^2} + \frac{z^2}{b'^2} = 1,$$

полуоси которых определяются соотношениями

$$a'^2 = a^2 \frac{v_0 - v}{v_0}, \qquad b'^2 = b^2 \frac{v_0 - v}{v_0}.$$

Возьмем два таких эллиптических цилиндра с бесконечно близкими значениями параметра v. Площадь нормального сечения между ними $dS = d(\pi a' b') = -\pi \frac{ab}{v_0} dv$. Расход жидкости:

$$Q = \rho \int v\, dS = -\rho \frac{\pi ab}{v_0} \int_{v_0}^{0} v\, dv,$$

или

$$Q = \frac{\rho \pi ab}{2} v_0. \tag{97.16}$$

§ 98. Законы гидродинамического подобия

1. Рассмотрим поток жидкости, обтекающий какое-нибудь тело или систему тел. Наряду с этой системой можно ввести бесконечное множество *подобных* и *подобно расположенных тел*, обтекаемых другими жидкостями. Каким условием должны удовлетворять параметры потока и постоянные, характеризующие свойства жидкостей (плотность, вязкость и пр.), чтобы оба потока были *механически подобны*? Если подобие имеет место, то, зная картину течения для первой системы тел, можно однозначно предсказать течение жидкости и для другой, геометрически подобной, системы тел. Это имеет важное значение в судостроении и самолетостроении. Вместо реальных кораблей или самолетов испытываются их *уменьшенные геометрически подобные модели*, а затем путем пересчета определяется