На внутренней поверхности эллиптической трубы $v=0$, т. е. $Ay^2+Bz^2+v_0=0$. Это уравнение должно переходить в уравнение эллиптического сечения трубы $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1=0$, а потому

$$A=-\frac{v_0}{a^2}, \qquad B=-\frac{v_0}{b^2}.$$

Для определения постоянных A, B, v_0 получилось три линейных уравнения. Решая их, находим

$$v_0=\frac{P_1-P_2}{2l\eta}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}, \tag{97.14}$$

$$v=v_0\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right). \tag{97.15}$$

Постоянная v_0 есть, очевидно, скорость течения на оси трубы.

Вычислим теперь расход жидкости. Поверхности, на которых скорость v постоянна, суть эллиптические цилиндры

$$\frac{y^2}{a'^2}+\frac{z^2}{b'^2}=1,$$

полуоси которых определяются соотношениями

$$a'^2=a^2\frac{v_0-v}{v_0}, \qquad b'^2=b^2\frac{v_0-v}{v_0}.$$

Возьмем два таких эллиптических цилиндра с бесконечно близкими значениями параметра v. Площадь нормального сечения между ними $dS=d(\pi a'b')=-\pi\frac{ab}{v_0}dv$. Расход жидкости:

$$Q=\rho\int v\,dS=-\rho\frac{\pi ab}{v_0}\int_{v_0}^{0}v\,dv,$$

или

$$Q=\frac{\rho\pi ab}{2}v_0. \tag{97.16}$$

§ 98. Законы гидродинамического подобия

1. Рассмотрим поток жидкости, обтекающий какое-нибудь тело или систему тел. Наряду с этой системой можно ввести бесконечное множество *подобных* и *подобно расположенных тел*, обтекаемых другими жидкостями. Каким условием должны удовлетворять параметры потока и постоянные, характеризующие свойства жидкостей (плотность, вязкость и пр.), чтобы оба потока были *механически подобны*? Если подобие имеет место, то, зная картину течения для первой системы тел, можно однозначно предсказать течение жидкости и для другой, геометрически подобной, системы тел. Это имеет важное значение в судостроении и самолетостроении. Вместо реальных кораблей или самолетов испытываются их *уменьшенные геометрически подобные модели*, а затем путем пересчета определяется поведение реальных систем. Простейший метод решения поставленной задачи дает теория размерностей.

Исследуем вопрос в общем виде. Пусть $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ — радиус-вектор и скорость жидкости в подобно расположенных точках, l — *характерный размер,* а v_0 — *характерная скорость потока,* например скорость жидкости, с которой она из «бесконечности» натекает на рассматриваемую систему тел. Свойства жидкости характеризуются ее плотностью ρ, вязкостью η и сжимаемостью. Вместо сжимаемости можно пользоваться скоростью звука в рассматриваемой жидкости. Если существенна сила тяжести, то последняя характеризуется ускорением свободного падения g. Если течение не стационарно, то надо ввести какое-то *характерное время* τ, за которое происходит заметное изменение течения. Ввиду наличия уравнений движения между величинами

$$\boldsymbol{v},\ v_0,\ \boldsymbol{r},\ l,\ \rho,\ \eta,\ c,\ g,\ \tau$$

должна существовать функциональная связь. Из них можно составить шесть независимых безразмерных комбинаций. Сюда относятся два отношения $\boldsymbol{v}/v_0$, $\boldsymbol{r}/l$ и еще четыре безразмерных числа:

$$\mathsf{Re} = \frac{\rho l v_0}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu}, \qquad (98.1)$$

$$\mathsf{F} = \frac{v_0^2}{gl}, \qquad (98.2)$$

$$\mathsf{M} = \frac{v_0}{c}, \qquad (98.3)$$

$$\mathsf{S} = \frac{v_0 \tau}{l}. \qquad (98.4)$$

Согласно правилу размерности одна из этих безразмерных комбинаций является функцией остальных, например

$$\frac{\boldsymbol{v}}{v_0} = \boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{l},\ \mathsf{Re},\ \mathsf{F},\ \mathsf{M},\ \mathsf{S}\right), \qquad (98.5)$$

или

$$\boldsymbol{v} = v_0 \boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{l},\ \mathsf{Re},\ \mathsf{F},\ \mathsf{M},\ \mathsf{S}\right). \qquad (98.6)$$

Если для двух течений пять из шести безразмерных комбинаций, перечисленных выше, совпадают, то будут совпадать и шестые. Это — общий *закон подобия течений*, а сами течения называются *механически* или *гидродинамически подобными*.

2. Величина (98.1) называется *числом Рейнольдса* (1842—1912), (96.2) — *числом Фруда*, (96.3) — *числом Маха,* (98.4) — *числом Струхаля.*

Физический смысл чисел Маха и Струхаля не требует пояснений. На физическом смысле чисел Рейнольдса и Фруда необходимо остановиться подробнее. При этом само собой станет ясным, что оба эти числа безразмерные. *По порядку величины число Рейнольдса есть отношение кинетической энергии жидкости к потере ее, обусловленной работой сил вязкости на характерной длине.* Действительно, кинетическая энергия жидкости $K \sim {}^1/_2\ \rho v_0^2 l^3$. Силу вязкости найдем, умножая величину вязкого напряжения $\eta\ v_0/l$ на характерную площадь l^2. Это дает $\eta v_0 l$. Произведение этой силы на характерную длину определяет по порядку величины работу сил вязкости $A \sim \sim \eta v_0 l^2$. Отношение кинетической энергии K к работе A будет

$$\frac{K}{A} \sim \frac{\rho l v_0}{\eta},$$

а это и есть число Рейнольдса. *Число Рейнольдса*, таким образом, *определяет относительную роль инерции и вязкости жидкости при течении. При больших числах Рейнольдса основную роль играет инерция, при малых — вязкость.*

Число Рейнольдса, конечно, определено не вполне четко, поскольку оно содержит характерную длину и характерную скорость, которые сами определены не четко. Это число, как и все остальные безразмерные числа в законе подобия, определено лишь по порядку величины. Если размеры тела в разных направлениях примерно одинаковы, то особой неопределенности не возникает. Если же это не так, то в качестве характерной длины могут быть выбраны разные величины, которые могут отличаться друг от друга значительно. Например, при течении жидкости по трубе за характерную длину можно взять длину трубы, ее радиус или какую-либо промежуточную величину. Соответствующие числа Рейнольдса могут отличаться на много порядков. Какое из этих чисел взять — зависит от поставленной задачи. Так, в предыдущем параграфе было выведено условие (97.9), при выполнении которого силами вязкости можно пренебречь. Величину, стоящую слева в формуле (97.9), можно рассматривать как число Рейнольдса, если за характерную длину принять $\frac{1}{16}\frac{R^2}{l}$. В рассматриваемом случае характерный размер зависит как от длины трубы, так и от ее радиуса. При таком выборе получается условие (97.9), справедливое для всех, а не только геометрически подобных круглых труб (т. е. труб с постоянным отношением R/l). Если труба длинная ($l \gg 16R$), то достаточное условие можно записать в виде

$$\frac{v_0 R}{\nu} \gg 1, \tag{98.7}$$

т. е. за характерную длину можно принять радиус R. Но мы совершили бы ошибку, если бы вместо (98.7) взяли условие $v_0 l/\nu \gg 1$.

Аналогичный смысл имеет *число Фруда* F. *Оно по порядку величины определяет отношение кинетической энергии жидкости к приращению ее, обусловленному работой силы тяжести на пути, равному характерной длине. Чем больше число Фруда, тем больше роль инерции по сравнению с тяжестью и наоборот.*

3. Для стационарных течений характерное время τ, а с ним и число Струхаля обращаются в бесконечность. Поэтому это число выпадает из соотношения (98.6). То же происходит с числом Маха в несжимаемых жидкостях, для которых оно обращается в нуль. Таким образом, для стационарных течений несжимаемых жидкостей соотношение (98.6) переходит в

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, \mathsf{Re}, \mathsf{F}\right). \tag{98.8}$$

Течения подобны, если они имеют одинаковые числа Рейнольдса и Фруда.

Следует, однако, заметить, что если при испытаниях на моделях применяется та же жидкость, в которой должна двигаться реальная система, то критерии подобия Рейнольдса и Фруда несовместимы друг с другом. В самом деле, запишем эти критерии в виде

$$\frac{l_1 v_1}{\nu_1} = \frac{l_2 v_2}{\nu_2}, \qquad \frac{v_1^2}{l_1 g_1} = \frac{v_2^2}{l_2 g_2},$$

где индекс 1 относится к реальной системе тел, а индекс 2 — к ее уменьшенной или увеличенной модели. Перемножая эти соотношения, получим

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{g_1}{g_2}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{1/2}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{3/2}. \tag{98.9}$$

Варьирование ускорения свободного падения g принципиально возможно, но практически нереально. Однако и при одинаковых g принципиально можно удовлетворить обоим критериям подобия. Для этого надо применять жидкости с различными кинематическими вязкостями, удовлетворяющими соотношению (98.9). В большинстве случаев это почти невозможно. При испытаниях на моделях практически может выполняться только один критерий подобия: либо Рейнольдса, либо Фруда. В некоторых случаях этого достаточно. Допустим, например, что число Рейнольдса велико, а число Фруда невелико или порядка единицы. Тогда движение жидкости в основном будет определяться инерцией и тяжестью. Вариации числа Рейнольдса на нем будут сказываться мало. В этом случае для подобия течения необходимо выполнение одного лишь *критерия Фруда*. Напротив, при малых числах Рейнольдса и больших числах Фруда определяющую роль играет инерция и вязкость; влияние тяжести незначительно. Подобие будет иметь место при *равенстве чисел Рейнольдса*.

4. Чтобы исследовать поведение самолета во время полета, например определить действующие на него силы, модель самолета закрепляют в *аэродинамической трубе*, в которой создается равномерный поток воздуха. В основе этого метода лежит *принцип относительности*, согласно которому ход явления может зависеть только от относительного движения самолета и воздуха. Современные аэродинамические трубы представляют грандиозные сооружения, в которых скорость воздуха может быть доведена до сотен метров в секунду. Значительное уменьшение размеров испытываемой модели неосуществимо, и вот почему. Для сохранения аэродинамического подобия необходимо равенство чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = vl/\nu$, так что при уменьшении размеров модели в несколько раз во столько же раз должна быть увеличена скорость потока. Но при больших скоростях начинает существенно сказываться сжимаемость воздуха, нарушающая аэродинамическое подобие. Поэтому при больших скоростях, интересующих современную авиацию, приходится применять модели либо в натуральную величину, либо лишь незначительно уменьшенные. Вот почему сечения аэродинамических труб должны быть очень большими, чтобы в них можно было помещать отдельные части самолета или даже целые самолеты. Для преодоления указанной трудности в принципе можно идти по пути увеличения плотности воздуха, делая аэродинамические трубы герметическими. Дело в том, что динамическая вязкость газа η практически от плотности газа не зависит (при заданной температуре), а потому кинематическая вязкость $\nu = \eta/\rho$ обратно пропорциональна плотности. Увеличивая плотность ρ, можно сохранить аэродинамическое подобие и для значительно уменьшенных моделей без существенного увеличения и даже без изменения скорости потока v. Несмотря на сложность построения герметических аэродинамических труб, этот метод все же получил практические применения. Разумеется, он не устраняет трудности, когда скорость потока приближается к скорости звука или превосходит ее, так как в этом случае для сохранения аэродинамического подобия требуется не только равенство чисел Рейнольдса, но и чисел Маха.

ЗАДАЧИ

1. Модель корабля длиной $l_1 = 5$ м приводится в движение мотором с мощностью $P_1 = 5$ лошадиных сил со скоростью $v_1 = 15$ км/ч. Какой мощности P требуется мотор для приведения в движение корабля длиной $l = 80$ м, геометрически подобного модели, если его движение гидродинамически подобно движению модели? Определить скорость корабля v при таких условиях.

Решение. Кинематическая вязкость воды $\nu = 0{,}010$ см²/с. Вычисляя числа Рейнольдса и Фруда для модели, получаем

$$\mathrm{Re} = \frac{l_1 v_1}{\nu_1} = 2{,}1 \cdot 10^7, \qquad \mathrm{F} = \frac{v_1^2}{g l_1} = 0{,}022.$$

Определяющую роль играет число Фруда, влияние числа Рейнольдса не очень существенно. Из равенства чисел Фруда получаем $v = v_1 (l/l_1)^{1/2} = 60$ км/ч. Далее из соображений размерности находим

$$P = \rho v^2 l^{5/2} g^{1/2} f(\mathrm{Re},\ \mathrm{F}) = \rho \mathrm{F} l^{7/2} g^{3/2} f(\mathrm{Re},\ \mathrm{F}).$$

Отсюда, если пренебречь влиянием числа Рейнольдса,

$$P = P_1 (l/l_1)^{7/2} \approx 80\,000 \text{ л. с.}$$

2. Во сколько раз следует изменить угловую скорость вращения вертикального винта вертолета и мощность его двигателя, чтобы подъемная сила осталась неизменной при замене винта и самого корпуса вертолета геометрически подобными им, но с линейными размерами, увеличенными в α раз?

Решение. Из соображений размерности следует, что подъемная сила должна выражаться формулой

$$F = \rho l^4 \omega^2 f_1 \left(\frac{l^2 \omega \rho}{\eta}\right),$$

а мощность — формулой

$$P = \rho l^5 \omega^3 f_2 \left(\frac{l^2 \omega \rho}{\eta}\right).$$

Поскольку плотность воздуха и его вязкость в обоих случаях одинаковы, подъемная сила не изменится, если не изменятся значения функции f_1 и коэффициента при ней. Условием этого является $l_1^2\omega_1 = l_2^2\omega_2$, откуда

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

и далее

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{l_2^5\omega_2^3}{l_1^5\omega_1^3} = \frac{l_2\omega_2}{l_1\omega_1} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{\alpha}.$$

§ 99. Турбулентность и гидродинамическая неустойчивость

1. До сих пор при изучении движений жидкости мы имели в виду так называемые *ламинарные* (слоистые) течения жидкостей и газов. Особенностью ламинарного течения является его *регулярность*. Течение при сохранении ламинарности может изменяться лишь вследствие изменения сил, действующих на жидкость, или внешних условий, в которых она находится. Так, при ламинарном течении в прямолинейной трубе постоянного поперечного сечения частицы жидкости движутся вдоль прямолинейных траекторий, параллельных оси трубы. Однако при достаточно больших скоростях ламинарное течение оказывается *неустойчивым* и переходит в так называемое *турбулентное течение*. Турбулентное течение — это такое течение, гидродинамические характеристики которого (скорость, давление, а для газов — плотность и температура) быстро и нерегулярно изменяются во времени (флуктуируют). Частицы жидкости совершают нерегулярные, неустановившиеся движения по сложным траекториям, что приводит к интенсивному перемешиванию между слоями движущейся жидкости. Примерами могут служить движение воды в бурном горном потоке, водопаде или за кормой быстроплывущего корабля, движение дыма, выходящего из фабричной трубы и т. п. Такие быстрые и нерегулярные изменения происходят не из-за изменений действующих сил или внешних условий, а вследствие неустойчивости ламинарных течений при определенных условиях. Неустойчивость ламинарных течений и возникновение турбулентности — очень сложные вопросы, еще далекие до окончательного решения. Рассмотрение их далеко выходит за рамки нашего курса. Тем не менее имеет смысл привести простейший пример, когда вопрос об устойчивости ламинарного течения решается элементарно.

2. Таким примером может служить установившееся ламинарное движение жидкости между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами при больших числах Рейнольдса (см. § 96). При больших числах Рейнольдса вязкостью жидкости можно пренебречь, считая жидкость идеальной. Для идеальных жидкостей, из-за отсутствия тангенциальных напряжений, зависимость скорости от расстояния до оси вращения может быть произвольной: $v = v(r)$. Но уже ничтожной вязкости достаточно, чтобы спустя некоторое время после начала движения установилось вполне определенное распределение скоростей вдоль радиуса, а именно (96.8).