Поскольку плотность воздуха и его вязкость в обоих случаях одинаковы, подъемная сила не изменится, если не изменятся значения функции f_1 и коэффициента при ней. Условием этого является $l_1^2\omega_1 = l_2^2\omega_2$, откуда

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

и далее

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{l_2^5\omega_2^3}{l_1^5\omega_1^3} = \frac{l_2\omega_2}{l_1\omega_1} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{\alpha}.$$

§ 99. Турбулентность и гидродинамическая неустойчивость

1. До сих пор при изучении движений жидкости мы имели в виду так называемые *ламинарные* (слоистые) течения жидкостей и газов. Особенностью ламинарного течения является его *регулярность*. Течение при сохранении ламинарности может изменяться лишь вследствие изменения сил, действующих на жидкость, или внешних условий, в которых она находится. Так, при ламинарном течении в прямолинейной трубе постоянного поперечного сечения частицы жидкости движутся вдоль прямолинейных траекторий, параллельных оси трубы. Однако при достаточно больших скоростях ламинарное течение оказывается *неустойчивым* и переходит в так называемое *турбулентное течение*. Турбулентное течение — это такое течение, гидродинамические характеристики которого (скорость, давление, а для газов — плотность и температура) быстро и нерегулярно изменяются во времени (флуктуируют). Частицы жидкости совершают нерегулярные, неустановившиеся движения по сложным траекториям, что приводит к интенсивному перемешиванию между слоями движущейся жидкости. Примерами могут служить движение воды в бурном горном потоке, водопаде или за кормой быстроплывущего корабля, движение дыма, выходящего из фабричной трубы и т. п. Такие быстрые и нерегулярные изменения происходят не из-за изменений действующих сил или внешних условий, а вследствие неустойчивости ламинарных течений при определенных условиях. Неустойчивость ламинарных течений и возникновение турбулентности — очень сложные вопросы, еще далекие до окончательного решения. Рассмотрение их далеко выходит за рамки нашего курса. Тем не менее имеет смысл привести простейший пример, когда вопрос об устойчивости ламинарного течения решается элементарно.

2. Таким примером может служить установившееся ламинарное движение жидкости между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами при больших числах Рейнольдса (см. § 96). При больших числах Рейнольдса вязкостью жидкости можно пренебречь, считая жидкость идеальной. Для идеальных жидкостей, из-за отсутствия тангенциальных напряжений, зависимость скорости от расстояния до оси вращения может быть произвольной: $v = v(r)$. Но уже ничтожной вязкости достаточно, чтобы спустя некоторое время после начала движения установилось вполне определенное распределение скоростей вдоль радиуса, а именно (96.8).

Однако для последующих рассуждений конкретизация вида функции $v = v(r)$ не обязательна. В невозмущенном потоке частицы жидкости движутся по окружностям с определенной угловой скоростью $\omega(r)=\frac{v(r)}{r}$. Рассмотрим какой-либо элемент жидкости, вращающийся по окружности радиуса r_0. На него действует центростремительная сила $F_0 = m\omega^2(r_0)r_0$, создаваемая разностью давлений окружающей жидкости. Введя момент количества движения $L(r) = mr^2\omega$, запишем выражение для силы в виде $F_0=\frac{L^2(r_0)}{mr_0^3}$. Допустим теперь, что под влиянием какого-то бесконечно малого случайного толчка рассматриваемый элемент жидкости сместился в новое положение, находящееся на расстоянии r от оси вращения. Можно предполагать, что толчок был совершен в направлении от или к оси вращения, так как, если движение жидкости неустойчиво по отношению к возмущениям специального вида, то оно неустойчиво вообще. Момент силы такого толчка относительно оси вращения равен нулю. Результирующая сил давления окружающей жидкости также не дает момента, поскольку она направлена к оси вращения. Поэтому при смещении элемента момент его количества движения сохранится, т. е. и в новом положении будет $L(r_0)$. Чтобы сместившийся элемент равномерно вращался по окружности радиуса r, на него должна действовать центростремительная сила $F_0'=\frac{L^2(r_0)}{mr^3}$. Между тем единственная сила, которой он подвержен, есть сила давления окружающей жидкости, а она равна $F=\frac{L^2(r)}{mr^3}$. Если эта сила не равна F_0', то элемент жидкости не удержится на новой круговой орбите, куда он попал. Он будет либо возвращаться к исходной орбите, либо удаляться от нее. В первом случае движение жидкости устойчиво, во втором — неустойчиво. Допустим, например, что $r > r_0$. Если $F > F_0'$, т. е. $L^2(r) > L^2(r_0)$, то давление окружающей жидкости больше того, которое требуется для удержания сместившегося элемента жидкости на окружности радиуса r. Сместившийся элемент вернется на исходную окружность — движение устойчиво. Если же $F < F_0'$, т. е. $L^2(r) < L^2(r_0)$, то силы давления окружающей жидкости недостаточно, чтобы удержать элемент на окружности радиуса r. Элемент жидкости будет уходить еще дальше — движение неустойчивое. Если $r < r_0$, то рассуждая аналогично, найдем, что при $L^2(r) < L^2(r_0)$ движение устойчиво, а при $L^2(r) > L^2(r_0)$ — неустойчиво. В обоих случаях критерий устойчивости можно выразить неравенством

$$\frac{dL^2}{dr} > 0, \tag{99.1}$$

или

$$\frac{d}{dr}(r^4\omega^2) > 0. \tag{99.2}$$

3. Таким образом, для устойчивости необходимо, чтобы величина $r^4\omega^2$ монотонно возрастала при удалении от оси вращения. Если цилиндры вращаются в противоположные стороны, то это невозможно. Действительно, в этом случае на поверхностях цилиндров угловая скорость ω имеет противоположные знаки. Так как ω — непрерывная функция r, то она должна обращаться в нуль в какой-то промежуточной точке. В этой точке величина $r^4\omega^2$ равна нулю, т. е. достигает минимума. По разные стороны от нее производная $\frac{d}{dr}(r^4\omega^2)$ имеет противоположные знаки, т. е. условие (99.2) не может выполняться. Значит, если цилиндры вращаются в противоположные стороны, то движение жидкости неустойчиво. Оно будет неустойчивым и в том случае, когда внутренний цилиндр вращается, а наружный покоится. Действительно, на поверхности наружного цилиндра $r^4\omega^2 = 0$, а на поверхности внутреннего $r^4\omega^2 > 0$. Поэтому с увеличением r вели-

чина $r^4\omega^2$ не может монотонно возрастать, и движение неустойчиво. Если же вращается наружный цилиндр, а внутренний покоится, то установившееся вращение жидкости будет устойчивым. В этом случае с удалением от оси вращения угловая скорость ω возрастает, а потому тем более будет возрастать $r^4\omega^2$. Теперь становится понятным, почему при измерении коэффициента внутреннего трения по методу, описанному в конце § 96, должен вращаться наружный, а не внутренний цилиндр. В противном случае вращение жидкости между цилиндрами было бы неустойчивым.

4. Приведенное исследование было выполнено без учета вязкости жидкости. Силы вязкости, уменьшая кинетическую энергию жидкости, всегда препятствуют развитию неустойчивостей. Область неустойчивости ламинарного течения сужается. Ограничимся этим общим замечанием о роли сил вязкости, так как нашей целью было только показать на простейшем примере, что ламинарное течение жидкости не всегда устойчиво.

5. При возрастании скорости течения ламинарное движение переходит в турбулентное. Скорость, при которой это происходит, называется *критической*. Вместо скорости лучше пользоваться безразмерной величиной — числом Рейнольдса. Действительно, соображения о подобии, изложенные в предыдущем параграфе, относятся и к турбулентным течениям, а также к переходу от ламинарного режима течения к турбулентному. Поэтому *в геометрически подобных системах переход от ламинарного режима течения к турбулентному должен происходить при одних и тех же значениях числа Рейнольдса.* Этот закон был установлен Рейнольдсом из соображений теории размерности. Граничное значение числа Рейнольдса, при котором ламинарный режим течения сменяется турбулентным, называется *критическим числом Рейнольдса* и обозначается $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$. Значение $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ зависит от конфигурации тел, обтекаемых жидкостью, а также от степени возмущенности самого ламинарного течения. Так, при течении по прямолинейной трубе круглого сечения $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = \bar{v}a/\nu \approx 1100$, если труба непосредственно присоединена к водопроводу и не приняты специальные предосторожности для уменьшения возмущенности воды у края трубы (a — радиус трубы, $\bar{v}$ — средняя скорость течения). Величину начальной возмущенности можно уменьшить, применяя трубы с гладкими стенками и закругленными краями. Кроме того, следует присоединять их к большому баку с водой и подождать, пока вода в нем не успокоится. Таким путем удается добиться затягивания ламинарного режима в трубах до значительно больших $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$, например до $\mathrm{Re}_{\text{кр}} \approx 25\,000$.

6. Законы Пуазейля, как уже указывалось, относятся только к ламинарным течениям жидкости по трубе. Предположение о ламинарности было явно использовано при выводе формул (97.4) и (97.16). Но не столь очевидно, где используется это предположение при выводе формулы Пуазейля (97.11) методом теории размерности. Разберем этот вопрос, а также выясним, какой формулой должна быть заменена формула Пуазейля при турбулентном течении. При турбулентном течении частицы жидкости движутся с *ускорениями*, а потому существенную роль должна играть *плотность жидкости* ρ. Она не обязательно должна входить в комбинации Q/ρ, как было при ламинарном течении. Напротив, величины Q и ρ могут входить независимо. Функциональная связь должна существовать между пятью величинами

$$Q, \quad \rho, \quad \frac{P_1-P_2}{l}, \quad S, \quad \eta,$$

а не между четырьмя, как было при ламинарном течении. Из этих пяти величин можно составить две независимые безразмерные комбинации, например

$$\frac{Q}{\rho}\cdot\frac{l}{P_1-P_2}\cdot\frac{\eta}{S^2} \quad \text{и} \quad \mathrm{Re} \equiv \frac{\bar{v}a}{\nu},$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость течения, определяемая соотношением $Q = \rho\bar{v}S$, a — радиус трубы, $\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость. Согласно правилу размерности одна из этих безразмерных комбинаций является функцией другой. Это приводит к соотношению

$$Q = C(\mathrm{Re})\,\frac{P_1 - P_2}{l\eta}\,\rho S^2. \tag{99.3}$$

При ламинарном течении коэффициент C есть постоянная, зависящая только от формы поперечного сечения трубы. При турбулентном течении этот коэффициент становится функцией числа Рейнольдса. Формулу (99.3) нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{\lambda(\mathrm{Re})}{a}\,\frac{\rho\bar{v}^2}{2}, \tag{99.4}$$

в каком ее обычно пишут в гидравлике. Коэффициент λ связан с C соотношением

$$\lambda(\mathrm{Re}) = \frac{2}{\pi C(\mathrm{Re})\,\mathrm{Re}}.$$

Он называется *коэффициентом сопротивления трубы*. При ламинарном течении коэффициент сопротивления обратно пропорционален числу Рейнольдса. При турбулентном течении вид функции $\lambda(\mathrm{Re})$ устанавливается эмпирически.

По поводу приведенного вывода формул (99.3) и (99.4) необходимо сделать следующее замечание. Турбулентное течение есть нестационарное течение. На регулярное движение накладываются нерегулярные колебания и вращения — *пульсации*, которым свойственны определенные периоды во времени. Таким образом, речь идет о нестационарном движении с определенным *характерным временем* и даже несколькими *характерными временами*. Поэтому, казалось бы, в формулах (99.3) и (99.4) коэффициенты C и λ должны были бы зависеть не только от числа Рейнольдса, но и от числа Струхаля. Однако при установившейся турбулентности число Струхаля само является функцией числа Рейнольдса, а потому нет никакого смысла вводить его в формулы (99.3) и (99.4).

ЗАДАЧА

Так как в идеальной жидкости при любых движениях не могут возникать касательные силы, то возможны *разрывные течения*, в которых касательные составляющие скорости жидкости претерпевают разрыв на некоторой поверхности (неподвижной или движущейся). Такие течения называются *тангенциальными разрывами*. Показать, что тангенциальные разрывы в несжимаемой жидкости гидродинамически неустойчивы.

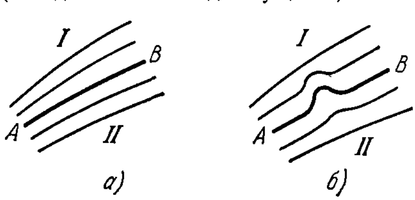

Рис. 263.

Решение. Понятно, что давления по разные стороны от поверхности разрыва должны быть одинаковы. При стационарном течении поверхность тангенциального разрыва неподвижна в пространстве. Поэтому на ней лежат линии тока. Пусть AB — одна из них (рис. 263, *а*). Допустим, что в результате какого-то бесконечно малого возмущения на линии тока AB возник бугор (рис. 263, *б*). Тогда со стороны I расстояния между линиями тока уменьшатся, а скорость жидкости увеличится. Напротив, со стороны II расстояния между линиями тока будут больше, и скорость жидкости уменьшится. Согласно закону Бернулли давление со стороны II возрастет, а со стороны I упадет. Под влиянием возросшей разности давлений бугор будет увеличиваться еще больше, т. е. движение является гидродинамически неустойчивым. Такой неустойчивостью объясняется развевание флагов на ветру.