

§ 5. Плоские электромагнитные волны

1. С электромагнитными волнами мы встречались уже в томе III нашего курса (гл. X). Выведем еще раз основные результаты, полученные в § 139 указанного тома, предполагая здесь, что волны — *монохроматические*. Будем представлять их в комплексной форме. В связи с этим полезно еще раз обратиться к § 126 того же тома, где введены комплексные обозначения и изложены правила оперирования с ними. По причинам, которые выяснятся в ходе изложения, монохроматические волны и их комплексная форма имеют важнейшее значение в учении о волнах вообще, а в особенности в оптике.

Допустим, что волны распространяются в однородном незаряженном диэлектрике. Применим к ним фундаментальные уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (5.1)$$

и материальные уравнения

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H. \quad (5.2)$$

Пусть волна — плоская и монохроматическая. Запишем ее в комплексном виде

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kr)}, \quad H = H_0 e^{i(\omega t - kr)}, \quad (5.3)$$

где ω — круговая частота, k — волновой вектор, а амплитуды E_0 и H_0 постоянны. Дифференцируя по времени, получаем $\partial E / \partial t = i\omega E$, т. е. операция дифференцирования в этом случае сводится к умножению на $i\omega$. Аналогично, дифференцирование по координатам x, y, z сводится к умножению на $-ik_x, -ik_y, -ik_z$. Заметив это и обозначая координатные орты через e_x, e_y, e_z , получаем

$$\operatorname{rot} H = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ k_x & k_y & k_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i [kH]$$

и аналогично для $\operatorname{rot} E$. В результате уравнения (5.1) перейдут в

$$[kH] = -\frac{\omega}{c} D, \quad [kE] = \frac{\omega}{c} B. \quad (5.4)$$

Введем единичный вектор N нормали к фронту волны и скорость распространения последнего в направлении этой нормали — так называемую *нормальную скорость* v . Тогда

$$k = \frac{\omega}{v} N, \quad (5.5)$$

и предыдущие соотношения перейдут в

$$D = -\frac{c}{v} [NH], \quad B = \frac{c}{v} [NE]. \quad (5.6)$$

Отсюда видно, что векторы E , H , v в плоской электромагнитной волне взаимно перпендикулярны. Их взаимное расположение представлено на рис. 18. Перпендикулярность векторов E и H к вектору v , или, что то же, к направлению распространения волны, означает, что *электромагнитные волны поперечны*. Таким образом, проблема поперечности световых волн, с которой не могли справиться теории механического эфира, совсем не возникает в электромагнитной теории света.

Следует отметить, что между взаимно перпендикулярными составляющими, на которые можно разложить комплексные амплитуды E_0 и H_0 , может существовать какая-то разность фаз φ . Если она равна нулю или π , то вектор E во всех точках пространства и во все моменты времени будет находиться в одной и той же плоскости, проходящей через направление нормали N , а вектор H — в плоскости, к ней перпендикулярной. Тогда волну называют *линейно-* или *плоскополяризованной*. Плоскость (E, N) , в которой лежат векторы E и N , называется *плоскостью колебаний* или *плоскостью поляризации волны*¹⁾. Если φ не равна нулю или π , то возникает так называемая *эллиптическая поляризация*. Исследованием ее мы займемся в главах V, VI и VII.

Из уравнений (5.1) можно определить и скорость электромагнитной волны v . С этой целью запишем эти уравнения в скалярной форме:

$$D = \frac{c}{v} H, \quad B = \frac{c}{v} E, \quad (5.7)$$

или

$$\epsilon E = \frac{c}{v} H, \quad \mu H = \frac{c}{v} E. \quad (5.8)$$

Отсюда после почленного перемножения и сокращения на EH получаем для v и показателя преломления $n = c/v$ следующие выражения:

$$v = c/\sqrt{\epsilon\mu}, \quad (5.9)$$

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (5.10)$$

¹⁾ Раньше плоскостью поляризации называли плоскость (H, N) , перпендикулярную к (E, N) . Но этот термин в таком понимании выходит из употребления.

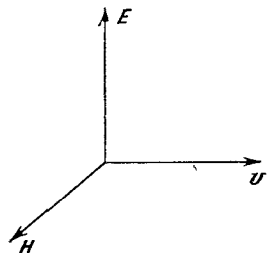


Рис. 18

Последнее соотношение называется *законом Максвелла*. Для немагнитных сред ($\mu = 1$) оно переходит в

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (5.11)$$

В вакууме $v = c$, т. е. v совпадает с *электродинамической постоянной* c . Тем самым раскрывается глубокий физический смысл открытия В. Вебера (1804—1891) и Р. Кольрауша (1809—1858), впервые измеривших эту постоянную в 1856 г. (см. т. III, §§ 51, 83).

2. Обратимся теперь к экспериментальной проверке соотношения (5.11). В табл. 1 сопоставлены экспериментально измеренные значения n и $\sqrt{\epsilon}$ для ряда веществ (показатели преломления относятся к желтой линии натрия). Для газов, приведенных в этой таблице, закон Максвелла (5.11) хорошо согласуется с опытом. Для жидких углеводородов согласие хуже. Для воды и спиртов, а также для большинства других твердых и жидких тел наблюдаются резкие нарушения соотношения (5.11). Однако в этом нет ничего неожиданного. Дело в том, что значения ϵ , приведенные в табл. 1, относятся к *статическим электрическим полям*, а значения n — к *электромагнитным полям световых волн*, частоты которых порядка $5 \cdot 10^{14}$ Гц. Диэлектрическая проницаемость ϵ обусловлена *поляризацией диэлектрика*, т. е. смещением заряженных частиц внутри атомов и молекул под действием внешнего электрического поля. Для правильного сопоставления надо брать значения ϵ , измеренные в электрических полях *тех же частот*. Действительно, атомы и молекулы обладают собственными частотами, так что амплитуды (и фазы) вынужденных колебаний электронов и ядер, из которых они состоят, зависят от частоты внешнего электрического поля. Особенно сильную зависимость следует ожидать в тех случаях, когда частота внешнего поля близка к одной из собственных частот атомов или молекул (резонанс!). В результате возникает зависимость показателя преломления вещества от частоты световой волны — так называемая *дисперсия света*.

Таблица 1

Вещество	n	$\sqrt{\epsilon}$	Вещество	n	$\sqrt{\epsilon}$
Воздух	1,000292	1,000302	Толуол	1,499	1,549
Азот	1,000299	1,000307	Четыреххлористый углерод	1,461	1,523
Кислород	1,000270	1,000273	Бензол	1,501	1,511
Водород	1,000139	1,000139	Сероуглерод	1,629	1,626
Углекислота	1,000499	1,000485	Парафин	1,422	1,405
Гелий	1,000035	1,000037	Вода	1,33	9,00
Оксид углерода	1,000335	1,000346	Метиловый спирт	1,34	5,7
Аммиак	1,000385	1,000385	Этиловый спирт	1,36	5,1
Закись азота	1,000507	1,000547			

Аналогично, намагниченность вещества (парамагнетизм и ферромагнетизм) возникает в результате *поворотов магнитных моментов атомов и молекул* под действием внешнего магнитного поля. Однако в полях столь высоких частот, которые лежат в оптической области спектра, атомы и молекулы не успевают поворачиваться за времена порядка периода световых колебаний. Диамагнитный же эффект, принципиально имеющий место во всех веществах, пренебрежимо мал. Поэтому в полях указанных частот намагничивание вещества практически не происходит. Вот почему в оптических явлениях, за редкими исключениями, магнитные свойства вещества не проявляются, и можно пользоваться формулой (5.11) вместо более общей формулы (5.10).

Таким образом, расхождения закона Максвелла (5.10) или (5.11) с опытом происходят за счет *нарушения материальных уравнений* (5.2). Такие уравнения справедливы не всегда, а только для *монохроматических полей*, причем ϵ и μ являются функциями частоты электромагнитного поля, различными для различных веществ. Чтобы отметить это обстоятельство, величины $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ часто называют *динамическими диэлектрической и магнитной проницаемостями*, в отличие от *статических проницаемостей*, в которые они переходят при $\omega = 0$. Лишь в области сравнительно длинных электромагнитных волн (превышающих примерно 1 см) функции $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ становятся постоянными для всех веществ. Поэтому в оптике электромагнитное поле приходится разлагать на монохроматические составляющие, что всегда возможно, согласно математической теореме Фурье (см. т. III, § 128). Предполагая, что выполняется принцип суперпозиции, эти монохроматические составляющие можно рассматривать *независимо друг от друга*. Таким путем можно исследовать распространение электромагнитных волн любого спектрального состава. Функции можно разлагать не только по синусам и косинусам, но и по бесконечному множеству других, «полных систем» функций. Однако выполнение материальных уравнений (5.2) для монохроматических полей, а также многие другие причины делают в оптике разложение полей на монохроматические составляющие *физически выделенным* среди множества других математически возможных разложений. Изложенные соображения, как и соображения, излагаемые в следующем пункте, имеют, конечно, общее значение, а не только для плоских электромагнитных волн.

3. Соблюдение материальных уравнений (5.2) (для монохроматических полей) предполагает, конечно, что величина ϵ не зависит от E . Благодаря этому уравнения поля *линейны и однородны*. Однако это справедливо только в *слабых полях*, т. е. таких полях, напряженность которых весьма мала по сравнению с напряженностями внутриатомных и внутримолекулярных полей (10^7 — 10^8 В/см). В *сильных полях*, где это условие не соблюдается, урав-

нения поля в средах становятся *нелинейными*, что ведет к *нарушению принципа суперпозиции*, а следовательно, и закона независимости световых пучков. Оптику слабых электромагнитных полей (в указанном выше смысле) называют *линейной оптикой*, а оптику сильных полей — *нелинейной оптикой*.

До недавнего времени источники света, которыми располагала оптика, позволяли получать световые пучки лишь «слабой» интенсивности с максимальными электрическими полями 0,1—10 В/см (см. задачу к этому параграфу). Нелинейные эффекты (за редкими исключениями) в этих случаях совсем незаметны. Случай сильных электрических полей в оптике считался чисто умозрительным и долгое время не исследовался. Начиная с 1960 г. — года изобретения *оптических квантовых генераторов (лазеров)* — положение изменилось. Эти источники света позволяют получать световые волны, в которых электрические поля достигают 10^5 — 10^7 В/см. Такие поля уже не могут считаться пренебрежимо малыми по сравнению с внутриаомными и внутримолекулярными полями. В них наблюдаются качественно новые «нелинейные явления» и притом не как малые поправки к «линейным эффектам», а как явления *крупного масштаба*, получившие уже важные практические применения. О нелинейной оптике мы будем говорить в главе XI. Во всех остальных главах излагается линейная оптика.

4. Для некоторых целей требуется более подробное исследование системы уравнений (5.4), которое мы и произведем. Запишем эту систему с учетом материальных уравнений (5.2):

$$[kH] = -\frac{\omega\epsilon}{c} E, \quad [kE] = \frac{\omega\mu}{c} H. \quad (5.12)$$

Подставляя H из второго уравнения в первое, получим

$$\frac{c}{\omega\mu} [k [kE]] = -\frac{\omega\epsilon}{c} E.$$

Так как векторы k и E взаимно перпендикулярны, то после раскрытия двойного векторного произведения и сокращения на E отсюда найдем

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon\mu, \quad (5.13)$$

или, пренебрегая намагничиванием вещества,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon. \quad (5.14)$$

Таково условие совместности уравнений (5.12). Так как по самому определению волнового вектора $k = \omega/v$, то из (5.13) следует: $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, т. е. прежний результат (5.9).

Однако условиям (5.13) или (5.14) можно удовлетворить и в тех случаях, когда волновой вектор \mathbf{k} комплексный, т. е. имеет вид

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' - i\mathbf{k}'', \quad (5.15)$$

где векторы \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' — вещественные. В этом случае волну называют *неоднородной*, в отличие от *однородной волны*, у которой волновой вектор \mathbf{k} вещественный. Электрический вектор неоднородной волны можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}. \quad (5.16)$$

Это выражение можно рассматривать как волну, амплитуда которой равна $\mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}}$. Она экспоненциально убывает в направлении вектора \mathbf{k}'' . Для такой волны можно говорить о *поверхностях равных амплитуд* и *поверхностях равных фаз*. Поверхности равных амплитуд суть плоскости, перпендикулярные к вектору \mathbf{k}'' . Поверхности равных фаз также плоскости, но перпендикулярные к вектору \mathbf{k}' . В *непоглощающей изотропной среде плоскости равных амплитуд и равных фаз взаимно перпендикулярны*. Для доказательства подставим выражение (5.15) в формулу (5.14). Отделяя вещественную часть от мнимой, найдем

$$\mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon, \quad (\mathbf{k}' \mathbf{k}'') = 0. \quad (5.17)$$

Из второго соотношения видно, что векторы \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' , а следовательно и плоскости равных амплитуд и фаз, взаимно перпендикулярны. Для поглощающих сред это утверждение, вообще говоря, не справедливо.

Чтобы получить более отчетливое представление о неоднородной волне, запишем ее в вещественной форме. Направим ось X вдоль вектора \mathbf{k}' , а ось Z — вдоль вектора \mathbf{k}'' . Кроме того, положим $E_{0x} = A_x \exp(i\delta_x)$ и аналогично для E_{0y} и E_{0z} . Тогда неоднородную волну (5.16) в вещественной форме можно представить так:

$$E_x = A_x e^{-k''z} \cos(\omega t - k'x + \delta_x),$$

$$E_y = A_y e^{-k''z} \cos(\omega t - k'x + \delta_y),$$

$$E_z = A_z e^{-k''z} \cos(\omega t - k'x + \delta_z).$$

Плоскости равных фаз распространяются в направлении оси X со скоростью $v' = \omega/k'$. Она меньше скорости однородных волн $c/\sqrt{\varepsilon}$, поскольку $k' > \omega\sqrt{\varepsilon}/c$, как это следует из (5.17). Амплитуда убывает в направлении оси Z . Когда $z \rightarrow -\infty$, амплитуда неоднородной волны возрастает неограниченно. Поэтому плоские неоднородные волны в неограниченной среде существовать не могут. Но они могут при определенных условиях возникать вблизи границы среды. Так, например, такие волны возникают в оптически менее

плотной среде при полном отражении света (см. § 66). Поле неоднородной волны заметно лишь в пограничном слое, толщина которого порядка длины волны. По этой причине неоднородные волны называют также *поверхностными волнами*.

ЗАДАЧА

Оценить напряженность поля солнечного излучения вблизи земной поверхности, если величина солнечной постоянной составляет около $2 \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \text{ мин}^{-1} = 1,39 \cdot 10^6 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \text{ с}^{-1}$. *Солнечной постоянной* называется количество энергии, попадающей от Солнца (при его среднем удалении от Земли) за единицу времени на единицу площади земной поверхности, перпендикулярной к излучению (при отсутствии абсорбции в атмосфере).

Решение. Волну, излучаемую Солнцем, у земной поверхности можно считать плоской. В такой волне $E = H$, поскольку для вакуума $\epsilon = \mu = 1$. Плотность потока энергии $\frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} E^2$. Приравнявая среднее значение этой величины значению солнечной постоянной, получим

$$\frac{c}{4\pi} \overline{E^2} = 1,39 \cdot 10^6, \text{ откуда } \overline{E^2} = 5,83 \cdot 10^{-4}, \sqrt{\overline{E^2}} = 0,024 \text{ СГСЭ} = 7,2 \text{ В/см.}$$

§ 6. Предельный переход от волновой оптики к геометрической

1. Геометрическая оптика является приближенным предельным случаем, в который переходит волновая оптика, когда длина световой волны стремится к нулю. Чтобы показать это, надо было бы исходить из уравнений Максвелла в неоднородных средах. Однако такой путь приводит к громоздким вычислениям. Мы поступим иначе. Среду, в которой распространяется свет, будем считать прозрачной и однородной. Предполагая сначала, что она изотропна, исключим из уравнений (5.1) и (5.2) вектор H . С этой целью первое уравнение (5.1) дифференцируем по t , а от обеих частей второго возьмем операцию rot , воспользовавшись при этом векторной формулой

$$\text{rot rot } E = \text{grad div } E - \Delta E \quad (6.1)$$

где Δ — оператор Лапласа в прямоугольной системе координат, т. е.

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.2)$$

Из полученных таким образом соотношений легко исключить H . В результате получится

$$\Delta E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (6.3)$$

¹⁾ Эту формулу легко получить, записав левую часть в виде $[\nabla[\nabla E]]$ и раскрыв по обычному правилу двойное векторное произведение. При этом надо только помнить, что векторы ∇ и E нельзя переставлять. Таким путем получаем: $\nabla(\nabla E) - \nabla^2 E$, т. е. правую часть (6.1).