плотной среде при полном отражении света (см. § 66). Поле неоднородной волны заметно лишь в пограничном слое, толщина которого порядка длины волны. По этой причине неоднородные волны называют также *поверхностными волнами*.

ЗАДАЧА

Оценить напряженность поля солнечного излучения вблизи земной поверхности, если величина солнечной постоянной составляет около 2 кал·см$^{-2}$ мин$^{-1}$ $= 1{,}39\cdot 10^6$ эрг·см$^{-2}$с$^{-1}$. *Солнечной постоянной* называется количество энергии, попадающей от Солнца (при его среднем удалении от Земли) за единицу времени на единицу площади земной поверхности, перпендикулярной к излучению (при отсутствии абсорбции в атмосфере).

Решение. Волну, излучаемую Солнцем, у земной поверхности можно считать плоской. В такой волне $E = H$, поскольку для вакуума $\varepsilon = \mu = 1$. Плотность потока энергии $\frac{c}{4\pi}EH = \frac{c}{4\pi}E^2$. Приравнивая среднее значение этой величины значению солнечной постоянной, получим

$$\frac{c}{4\pi}\overline{E^2} = 1{,}39\cdot 10^6, \quad \text{откуда} \quad \overline{E^2} = 5{,}85\cdot 10^{-4}, \quad \sqrt{\overline{E^2}} = 0{,}024 \text{ СГСЭ} = 7{,}2 \text{ В/см}.$$

§ 6. Предельный переход от волновой оптики к геометрической

1. Геометрическая оптика является приближенным предельным случаем, в который переходит волновая оптика, когда длина световой волны стремится к нулю. Чтобы показать это, надо было бы исходить из уравнений Максвелла в неоднородных средах. Однако такой путь приводит к громоздким вычислениям. Мы поступим иначе. Среду, в которой распространяется свет, будем считать прозрачной и однородной. Предполагая сначала, что она изотропна, исключим из уравнений (5.1) и (5.2) вектор $\boldsymbol{H}$. С этой целью первое уравнение (5.1) дифференцируем по t, а от обеих частей второго возьмем операцию rot, воспользовавшись при этом векторной формулой

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E}\ ^{1)}, \tag{6.1}$$

где Δ — оператор Лапласа в прямоугольной системе координат, т. е.

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{6.2}$$

Из полученных таким образом соотношений легко исключить $\boldsymbol{H}$. В результате получится

$$\Delta\boldsymbol{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{6.3}$$

---

[1]) Эту формулу легко получить, записав левую часть в виде $[\nabla[\nabla\boldsymbol{E}]]$ и раскрыв по обычному правилу двойное векторное произведение. При этом надо только помнить, что векторы ∇ и $\boldsymbol{E}$ нельзя переставлять. Таким путем получаем: $\nabla(\nabla\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E}$, т. е. правую часть (6.1).

где v определяется прежним выражением (5.9). Уравнение (6.3) называется *волновым*. Такому же уравнению удовлетворяет и вектор $\boldsymbol{H}$.

Для неоднородных сред уравнение (6.3) усложняется. Однако, если интересоваться *только интенсивностью волн*, отвлекаясь от их *поляризации*, то оказывается, что в предельном случае геометрической оптики уравнение (6.3) приводит к правильным результатам [1]). Поэтому даже в случае неоднородных сред предельный переход к геометрической оптике можно выполнить на основе волнового уравнения

$$\Delta E - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \tag{6.4}$$

в котором E означает длину вектора $\boldsymbol{E}$, а скорость v считается известной функцией координат. Хотя такой путь и не вполне удовлетворителен, но на нем проще уяснить метод, применяемый при обосновании геометрической оптики. Результаты, к которым мы придем, применимы не только к световым, но и *ко всем другим волнам*, например акустическим или волнам де Бройля в квантовой механике.

2. Предполагая волну монохроматической, запишем ее в виде

$$E = a(\boldsymbol{r})\, e^{i(\omega t - k_0\Phi)}, \tag{6.5}$$

где $a(\boldsymbol{r})$ и $\Phi(\boldsymbol{r})$ — вещественные функции координат. Волновое число в вакууме $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$ введено для удобства, как большой размерный параметр. Подставим выражение (6.5) в уравнение (6.4) и отделим вещественную часть от мнимой. В результате получим два уравнения:

$$(\operatorname{grad}\Phi)^2 = n^2 + \frac{\Delta a}{k_0^2 a}, \tag{6.6}$$

$$a\,\Delta\Phi + 2\operatorname{grad} a \operatorname{grad}\Phi = 0. \tag{6.7}$$

Допустим теперь, что длина волны мала, а амплитуда a меняется в пространстве не очень быстро, так что соблюдается неравенство

$$\left|\frac{\Delta a}{k_0^2 a}\right| \equiv \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\left|\frac{\Delta a}{a}\right| \ll n^2. \tag{6.8}$$

Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\left|\lambda\frac{\partial a}{\partial x}\right| \ll a, \qquad \left|\lambda\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right| \ll \left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| \tag{6.9}$$

для любого направления оси X. Действительно, тогда

$$\left|\lambda^2\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right| \ll \left|\lambda\frac{\partial a}{\partial x}\right| \ll a,$$

[1]) Предельный переход к геометрической оптике на основе векторных уравнений Максвелла подробно исследован в книге: *Сивухин Д. В.* Лекции по физической оптике, ч. II. Ротапринтное издание, Новосибирск, 1969.

что совпадает с (6.8), так как $|\Delta a| \sim |\partial^2 a/\partial x^2|$. Пренебрегая в (6.6) последним членом, получим

$$(\mathrm{grad}\, \Phi)^2 = n^2. \tag{6.10}$$

Уравнения (6.10) и (6.7) и составляют *систему уравнений геометрической оптики*. Из их вывода ясно, что *условием применимости геометрической оптики является малость изменения амплитуды волны и ее первых пространственных производных на протяжении длины волны*. В противном случае могут возникать заметные отступления от геометрической оптики. Это происходит, например, в следующих случаях: 1) на границе геометрической тени; 2) вблизи фокуса, т. е. геометрической точки схождения лучей; 3) при распространении света в среде с резко меняющимся показателем преломления (например, в мутной среде); 4) при распространении света в сильно поглощающих средах (например, металлах).

3. Величину Φ Клаузиус (1822—1888) назвал *эйконалом*, а уравнение (6.10) — *уравнением эйконала*. Его можно записать в векторной форме:

$$\mathrm{grad}\, \Phi = n\boldsymbol{s}, \tag{6.11}$$

где $\boldsymbol{s}$ — единичный вектор нормали к фронту волны

$$\omega t - k_0 \Phi = \mathrm{const}, \tag{6.12}$$

проведенный в сторону ее распространения.

Уравнение эйконала определяет скорость распространения волнового фронта в направлении нормали $\boldsymbol{s}$. Действительно, на основании определения градиента можно записать (6.11) в виде $\partial\Phi/\partial s = n$. С другой стороны, дифференцирование уравнения распространения волнового фронта (6.12) дает $\omega\, dt = k_0\, d\Phi$, или

$$\omega\, dt = \frac{\omega}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = \frac{\omega}{c} n\, ds = \frac{\omega}{v} ds.$$

Отсюда для нормальной скорости волнового фронта находим

$$\frac{ds}{dt} = v, \tag{6.13}$$

т. е. эта скорость такая же, как у плоской волны. Этого и следовало ожидать, так как малый участок волнового фронта в малых объемах пространства должен вести себя как плоский. Полученный результат позволяет построить волновой фронт F_2 в момент времени $t + dt$, если известно его положение F_1 в момент t. Для этого из каждой точки исходного волнового фронта F_1 (рис. 19) следует отложить в направлении нормали отрезок длиной $v\, dt$. Соединив концы всех таких отрезков, мы и получим волновой фронт F_2 в момент $t + dt$. Вместо этого можно из каждой точки волнового фронта F_1, как из центра, описать сферы радиусом $v\, dt$. Огибающая таких сфер и будет волновым фронтом F_2. Оба построения совершенно эквивалентны. Тем самым построение Гюйгенса (см. § 3, пункт 4) распространяется и на волны в неоднородных средах.

4. Второе уравнение геометрической оптики (6.7) теперь можно записать в виде

$$a\,\Delta\Phi + 2n\,\frac{\partial a}{\partial s} = 0. \tag{6.14}$$

Если определить *луч как ортогональную траекторию к семейству волновых фронтов, или семейству равных фаз* (6.12), то взятие про-

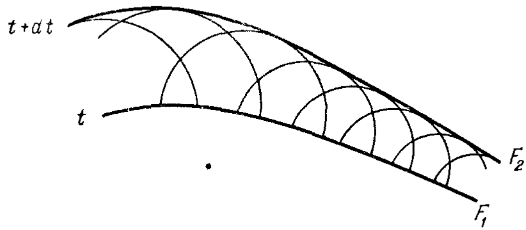

Рис. 19.

изводной по s можно понимать в смысле дифференцирования по длине луча s. Интегрируя уравнение (6.14) вдоль луча, придем к соотношению

$$a = a_0 \exp\left(-\int_0^s \frac{\Delta\Phi}{2n}\,ds\right), \tag{6.15}$$

где a_0 — амплитуда в «начальной точке» луча, от которой отсчитывается длина s. Формула (6.15) показывает, что для определения волнового поля во всех точках луча достаточно знать его значение в какой-либо одной точке того же луча. Но уравнения геометрической оптики ничего не могут сказать относительно изменения амплитуды поля при переходе от одного луча к соседнему. Они допускают любые изменения амплитуды от луча к лучу. Необходима только достаточная медленность такого изменения, чтобы волна, формально удовлетворяющая уравнениям геометрической оптики, могла быть реализована в действительности. Таким образом, *в приближении геометрической оптики световое поле на всяком луче совершенно не зависит от полей других лучей.*

Отсюда следует основное представление геометрической оптики о *распространении световой энергии вдоль лучей*, точнее — вдоль «лучевых трубок», образованных лучами. Отсюда также следует, что при нахождении волнового фронта построением Гюйгенса новый волновой фронт не выходит за пределы огибающей вторичных сферических волн Гюйгенса. Тем самым дано полное обоснование гипотезы Гюйгенса об огибающей и показано, что эта гипотеза справедлива только в приближении геометрической оптики.

К представлению о распространении света вдоль лучей можно прийти и другим путем. Умножая уравнение (6.7) на a и замечая, что $\Delta\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \operatorname{div}(n\boldsymbol{s})$, перепишем это уравнение в виде

$$a^2 \operatorname{div}(n\boldsymbol{s}) + 2a \operatorname{grad} a\,(n\boldsymbol{s}) = 0,$$

или

$$\operatorname{div}(na^2\boldsymbol{s}) = 0. \tag{6.16}$$

Полученное соотношение по форме совпадает с уравнением непрерывности $\operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0$ для стационарного течения несжимаемой жидкости. Роль линий тока играют световые лучи, а плотности потока жидкости — вектор $\boldsymbol{j} = na^2\boldsymbol{s}$, пропорциональный плотности потока световой энергии. Свет как бы течет вдоль узких «световых трубок», т. е. трубок, боковые стенки которых образованы лучами. Через эти боковые стенки свет не проникает. Если σ — поперечное сечение трубки, то вдоль нее величина $na^2\sigma$ сохраняется неизменной, как это видно из уравнения (6.16).

Можно выделить отдельную световую трубку, или *физический световой луч*, поставив на пути распространяющейся волны (6.5) узкую диафрагму. Только диафрагма не должна быть особенно узкой, а световая трубка слишком длинной. Дело в том, что на краях диафрагмы и вблизи боковых границ трубки амплитуда поля меняется резко, т. е. условия применимости геометрической оптики не выполняются. Возникает дифракция света, приводящая к уширению светового пучка. Однако, если диафрагма не слишком мала, а световая трубка не слишком длинна, эти эффекты малосущественны. Но они всегда скажутся на больших расстояниях от диафрагмы. В теории дифракции будет показано, что необходимым условием, при выполнении которого можно говорить о физическом световом луче, является неравенство

$$l \ll D^2/\lambda, \tag{6.17}$$

где D — минимальный линейный размер диафрагмы, а l — расстояние от диафрагмы, измеренное вдоль луча.

Оптической длиной линии в однородной среде называется произведение геометрической длины этой линии l на показатель преломления n. Если среда неоднородна, то оптическая длина определяется интегралом $\int n\,dl$, взятым вдоль рассматриваемой линии. Если ABC — геометрическая длина линии, то оптическая длина ее обозначается через (ABC), т. е. заключением в круглые скобки геометрической длины. Из построения Гюйгенса, изложенного в пункте 3 этого параграфа, следует, что оптические длины всех лучей между двумя положениями волнового фронта равны между собой.

5. Нетрудно получить из волновых представлений и выражение для кривизны луча в однородной среде. Для этого через бесконечно малый отрезок луча AC проведем соприкасающуюся плоскость (рис. 20). Она пересечет волновые фронты, проходящие через концы этого отрезка, вдоль кривых AB и CD. Пусть BD — бесконечно близкий луч, лежащий в той же плоскости. Так как лучи перпендикулярны к волновым фронтам, то все углы бесконечно малого криволинейного четырехугольника $ABDC$ прямые. А так как оптические длины лучей между любыми двумя положениями волнового фронта одинаковы, то $nl = (n + dn)(l + dl)$, где l и $l + dl$ — длины отрезков AC и BD, а n и $n + dn$ — соответствующие им показатели преломления. С точностью до бесконечно малых высшего порядка отсюда получаем $l\,dn + n\,dl = 0$. По определению радиуса кривизны $l = R\varphi$, где φ — угол между касательными к лучу AC в точках A и C, равный углу между касательными к отрезкам AB и CD в тех же точках. Очевидно, $dl = -a\varphi$, где a — длина отрезка AB. Приращение показателя преломления dn происходит вдоль главной нормали N, так что $dn = (\partial n/\partial N)\,a$. Учитывая все это, получаем: $R\varphi\,(\partial n/\partial N)\,a - na\varphi = 0$, откуда

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial N}, \tag{6,18}$$

что совпадает с формулой (4.1).

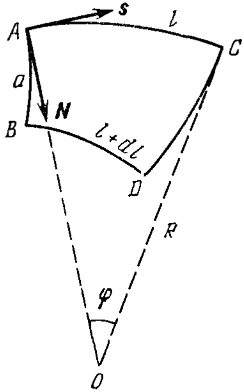

Рис. 20.

§ 7. Принцип Ферма

1. Пьер Ферма (1601—1675) выдвинул принцип, согласно которому *свет при распространении из одной точки в другую выбирает путь, которому соответствует наименьшее время распространения.* Ферма руководствовался телеологическими соображениями, согласно которым природа действует целенаправленно: она не может быть расточительной и должна достигать своих целей с наименьшей затратой средств. Подобные соображения, конечно, чужды науке и не могут служить обоснованием принципа Ферма. Но сам принцип (после введения некоторых уточнений) верен и может оказаться полезным при решении отдельных вопросов геометрической оптики. Это было продемонстрировано уже самим Ферма, который с помощью своего принципа вывел закон преломления Снеллиуса и получил такое же выражение для показателя преломления, что и в волновой теории света. В частности, он пришел к заключению, что скорость света в более преломляющей среде меньше, чем в менее преломляющей.

2. Для доказательства принципа Ферма допустим сначала, что показатель преломления среды меняется в пространстве непрерывно и достаточно медленно, так что условия применимости геометрической оптики выполнены. Пусть в среде распространяется волна вида (6.5), например порожденная точечным источником. Ей соответствует система лучей, представленная на рис. 21. Если эйконал Φ — однозначная функция координат, то из уравнения (6.11)