5. Нетрудно получить из волновых представлений и выражение для кривизны луча в однородной среде. Для этого через бесконечно малый отрезок луча AC проведем соприкасающуюся плоскость (рис. 20). Она пересечет волновые фронты, проходящие через концы этого отрезка, вдоль кривых AB и CD. Пусть BD — бесконечно близкий луч, лежащий в той же плоскости. Так как лучи перпендикулярны к волновым фронтам, то все углы бесконечно малого криволинейного четырехугольника $ABDC$ прямые. А так как оптические длины лучей между любыми двумя положениями волнового фронта одинаковы, то $nl = (n + dn)(l + dl)$, где l и $l + dl$ — длины отрезков AC и BD, а n и $n + dn$ — соответствующие им показатели преломления. С точностью до бесконечно малых высшего порядка отсюда получаем $l\,dn + n\,dl = 0$. По определению радиуса кривизны $l = R\varphi$, где φ — угол между касательными к лучу AC в точках A и C, равный углу между касательными к отрезкам AB и CD в тех же точках. Очевидно, $dl = -a\varphi$, где a — длина отрезка AB. Приращение показателя преломления dn происходит вдоль главной нормали N, так что $dn = (\partial n/\partial N)\,a$. Учитывая все это, получаем: $R\varphi\,(\partial n/\partial N)\,a - na\varphi = 0$, откуда

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial N}, \tag{6.18}$$

что совпадает с формулой (4.1).

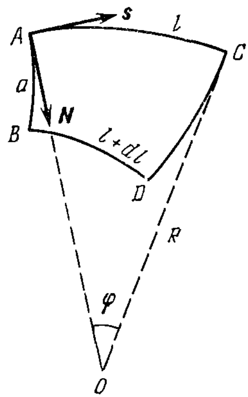

Рис. 20.

§ 7. Принцип Ферма

1. Пьер Ферма (1601—1675) выдвинул принцип, согласно которому *свет при распространении из одной точки в другую выбирает путь, которому соответствует наименьшее время распространения.* Ферма руководствовался телеологическими соображениями, согласно которым природа действует целенаправленно: она не может быть расточительной и должна достигать своих целей с наименьшей затратой средств. Подобные соображения, конечно, чужды науке и не могут служить обоснованием принципа Ферма. Но сам принцип (после введения некоторых уточнений) верен и может оказаться полезным при решении отдельных вопросов геометрической оптики. Это было продемонстрировано уже самим Ферма, который с помощью своего принципа вывел закон преломления Снеллиуса и получил такое же выражение для показателя преломления, что и в волновой теории света. В частности, он пришел к заключению, что скорость света в более преломляющей среде меньше, чем в менее преломляющей.

2. Для доказательства принципа Ферма допустим сначала, что показатель преломления среды меняется в пространстве непрерывно и достаточно медленно, так что условия применимости геометрической оптики выполнены. Пусть в среде распространяется волна вида (6.5), например порожденная точечным источником. Ей соответствует система лучей, представленная на рис. 21. Если эйконал Φ — однозначная функция координат, то из уравнения (6.11)

следует, что циркуляция вектора $n\mathbf{s}$ по любому замкнутому контуру равна нулю, т. е.

$$\oint n\,(\mathbf{s}\,d\mathbf{l}) = 0, \tag{7.1}$$

где $d\mathbf{l}$ — вектор элементарного смещения вдоль этого контура. Возьмем две произвольные точки A и B, лежащие на одном из лучей. Соединим их произвольной линией ADB. В силу (7.1)

$$\int\limits_{ACB} n\,(\mathbf{s}\,d\mathbf{l}) = \int\limits_{ADB} n\,(\mathbf{s}\,d\mathbf{l}).$$

На луче ACB векторы $\mathbf{s}$ и $d\mathbf{l}$ направлены одинаково, следовательно, $(\mathbf{s}\,d\mathbf{l}) = dl$. На линии же ADB $(\mathbf{s}\,d\mathbf{l}) = dl\cos(\mathbf{s},\ d\mathbf{l}) \leqslant dl$. Поэтому

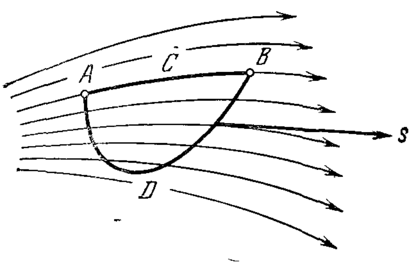

Рис. 21.

$$\int\limits_{ACB} n\,dl \leqslant \int\limits_{ADB} n\,dl. \tag{7.2}$$

Знак равенства относится только к случаю, когда кривая ADB сама является лучом. Таким образом, *если показатель преломления меняется в пространстве непрерывно, то оптическая длина луча между любыми двумя точками меньше оптической длины всякой другой линии, соединяющей те же точки*. Но это есть другая формулировка принципа Ферма, так как оптическая длина луча пропорциональна времени распространения света вдоль него.

Приведенная формулировка принципа Ферма нуждается в уточнении. В некоторых случаях она может оказаться неверной. Рассмотрим, например, среду с сферически симметричным распределением показателя преломления вокруг центра O (рис. 22). Примером такой среды может служить планетная атмосфера. Предположим, что показатель преломления меняется в пространстве так, что световой луч, выйдя из какой-либо точки перпендикулярно к радиусу, описывает окружность с центром в точке O. Пусть свет попадает из точки A в точку B по большой дуге ACB этой окружности. Но он может пройти из A в B и по дуге ADB той же окружности, затрачивая на распространение меньшее время. Меньшее время потребовалось бы и в том случае, если бы свет избрал какой-либо другой путь, бесконечно близкий к дуге ADB. Все это противоречит принципу Ферма в приведенной выше формулировке.

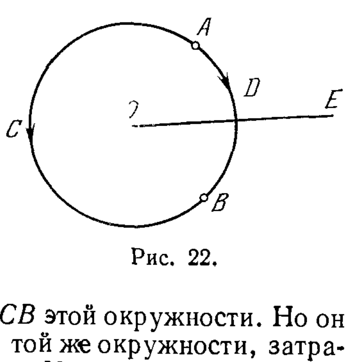

Рис. 22.

Причина противоречия состоит в том, что в приведенном примере эйконал Ф не есть однозначная функция координат, как это предполагалось при выводе. Действительно, если луч описывает окружность вокруг центра O, то он вернется в исходную точку с новым значением эйконала: эйконал Ф получит приращение nl, где l — длина описанной окружности. Если окружность описывается m раз, то приращение эйконала будет $2mnl$. Это и значит, что функция Ф неоднозначна. Для справедливости принципа Ферма необходимо наложить на выбор воображаемых путей распространения света такие ограничения, чтобы эйконал Ф вел себя как *однозначная функция координат*. В приведенном примере этого можно достигнуть, поставив перегородку вдоль меридиональной полуплоскости ODE и ограничиваясь только такими путями, которые не пересекают эту перегородку.

Подобным приемом можно воспользоваться и во всех остальных случаях, в которых эйконал Ф оказывается неоднозначным. Впрочем, в применениях принципа Ферма достаточно ограничиться только такими путями, которые проходят бесконечно близко от действительного пути света. В этом случае надобность во введении перегородок отпадает.

3. При наличии поверхностей раздела сред, на которых лучи могут испытывать отражение или преломление, в формулировку и доказательство принципа Ферма надо ввести дополнения. Пусть луч, выйдя из точки A (рис. 23), после отражений или преломлений в точках $C, D, E, \ldots$ попадает в точку B. Назовем *виртуальным путем света* любую линию $AC'D'E'B$ между крайними точками A и B, которая получается из $ACDEB$ в результате бесконечно малого бокового смещения ее и отличается от нее бесконечно мало по направлению. Принцип Ферма утверждает, что *оптическая длина действительного светового пути* (*или пропорциональное ей время распространения*) *стационарна*. Это значит, что разность оптических длин действительного и виртуального путей света есть величина *более высокого порядка малости*, чем боковое смещение виртуального пути относительно действительного. Только эта стационарность, а не минимальность оптической длины луча и существенна в приложениях.

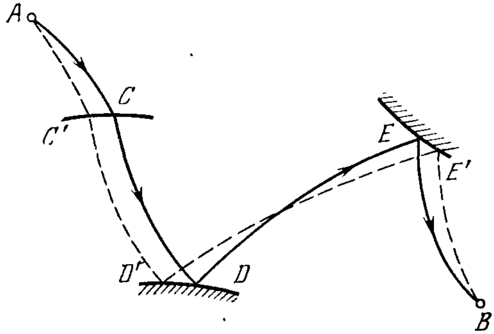

Рис. 23.

При доказательстве достаточно ограничиться преломлением на одной границе. Случай отражения исследуется так же. Пусть

MN — граница раздела сред 1 и 2, а ACB — действительный луч, соединяющий точку A с точкой B (рис. 24). Вообразим два бесконечно узких пучка лучей: один в первой среде, исходящий из точки A, другой во второй среде, сходящийся в точке B. За положительные направления лучей примем направления от A к B. Выберем в этих пучках два луча AC' и $C'B$, пересекающихся на границе раздела в точке C'. Кривую $AC'B$ можно рассматривать как виртуальный путь света, так как луч $C'B$ в общем случае отнюдь не возникает в результате преломления луча AC'. Обозначим через Φ_1 и Φ_2 эйконалы рассматриваемых пучков лучей, отсчитываемые от точек A и B соответственно. Тогда

$$\int\limits_{ACB} n\,ds = \int\limits_{AC} n\,ds + \int\limits_{CB} n\,ds = \int\limits_{AC} n\,ds - \int\limits_{BC} n\,ds = \Phi_1(C) - \Phi_2(C).$$

Вариация интеграла $\int n\,ds$ при смещении точки C в произвольную бесконечно близкую точку C' границы раздела будет

$$\delta\int n\,ds = \delta\Phi_1 - \delta\Phi_2.$$

Если $\delta\boldsymbol{r} \equiv \overrightarrow{CC'}$ — вектор смещения, то $\delta\Phi_1 = (\operatorname{grad}\Phi_1\,\delta\boldsymbol{r}) = n_1(\boldsymbol{s}_1\delta\boldsymbol{r})$ и аналогично $\delta\Phi_2 = n_2\,(\boldsymbol{s}_2\delta\boldsymbol{r})$, так что

$$\delta\int n\,ds = (n_1\boldsymbol{s}_1 - n_2\boldsymbol{s}_2)\,\delta\boldsymbol{r}.$$

В силу закона преломления Снеллиуса вектор $(n_1\boldsymbol{s}_1 - n_2\boldsymbol{s}_2)$ перпендикулярен к границе раздела сред в точке падения, а потому и к бесконечно малому смещению вдоль границы $\delta\boldsymbol{r}$. Таким образом, в первом порядке по δr вариация оптической длины луча ACB обращается в нуль. При доказательстве предполагалось, что виртуальный путь состоит из отрезков лучей AC' и $C'B$. Однако результат не изменится, если эти отрезки заменить произвольными бесконечно близкими к ним линиями, соединяющими те же точки A и C', C' и B. В самом деле, поскольку AC' и $C'B$ — действительные лучи в первой и второй средах, их оптические длины по доказанному выше минимальны. По этой причине замена действительных лучей AC' и $C'B$ бесконечно близкими к ним линиями, соединяющими те же крайние точки, не меняет в первом порядке оптические длины соответствующих путей. Следовательно, вариация оптической длины луча ACB останется равной нулю, каков бы ни был виртуальный путь света. А к этому в рассматриваемом случае и сводится содержание принципа Ферма.

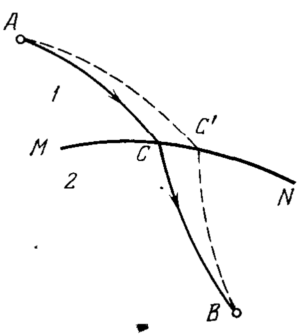

Рис. 24.

4. В применениях иногда удобна следующая теорема, являющаяся непосредственным следствием принципа Ферма. *Пусть A и B — произвольные точки луча ACB* (рис. 25). *Проведем через точку B произвольную гладкую поверхность BE, ортогональную к лучу ACB в точке B. Пусть BD — бесконечно малое смещение вдоль этой поверхности. Соединим начальную точку луча A с точкой D произвольной линией AHD, бесконечно мало отличающейся по направлению от луча ACB. Тогда вариация оптической длины при переходе от истинного пути света ACB к виртуальному AHD будет равна нулю.*

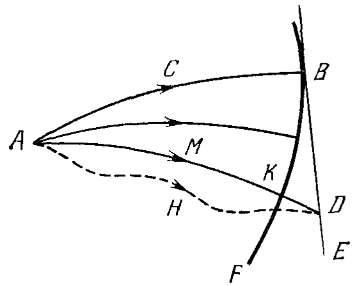

Рис. 25.

Для доказательства возьмем пучок лучей, исходящих из точки A. Все эти лучи ортогональны к волновому фронту BF, а их оптические длины от точки A до волнового фронта одинаковы. В частности, $(ACB) = (AMK)$. Но по принципу Ферма с точностью до бесконечно малых высшего порядка $(AMK) = (AHK)$. Далее, поскольку поверхности BDE и BKF касаются друг друга в точке B, длина луча KD будет бесконечно малой высшего порядка по сравнению с BD. Поэтому оптическая длина AHD будет отличаться от оптической длины ACB также на величину высшего порядка малости по сравнению с боковым смещением BD. Это и требовалось доказать.

5. Если свет распространяется в однородных средах, граничащих между собой, то в каждой среде путь света будет прямолинеен. В этом случае задача сводится только к нахождению точек на поверхностях раздела сред, в которых происходит отражение и преломление светового луча. Поэтому нет необходимости вводить криволинейные виртуальные пути света. Достаточно ограничиться ломаными виртуальными путями, состоящими из отрезков прямых линий, причем изломы таких путей должны происходить на границах раздела рассматриваемых сред. Даже при таких ограничениях оптическая длина действительного светового пути может быть не только минимальной, но и максимальной или стационарной.

Чтобы показать это в случае отражения света, возьмем эллипсоидальное зеркало, получающееся от вращения эллипса вокруг его большой оси F_1F_2 (рис. 26).

Пусть F_1 и F_2 — фокусы эллипсоида. Если A — точка на его поверхности, то $F_1A + F_2A = 2a$, где $2a$ — длина большой оси эллипсоида. Поверхность зеркала делит все пространство на две части: *внутреннюю*, сумма расстояний каждой точки которой от фокусов F_1 и F_2 меньше $2a$, и *внешнюю*, для которой эта сумма больше $2a$. Пусть световой луч выходит из фокуса F_1. Тогда после отражения от эллипсоидального зеркала в точке A он пройдет через второй фокус F_2, так как по известному свойству эллипса прямые F_1A и F_2A образуют одинаковые углы с нормалью к поверхности зеркала. При смещении вдоль поверхности зеркала сумма $F_1A + F_2A$, а с ней и время распространения света из F_1 в F_2 не изменяются. Вариация времени распространения при таком смещении равна нулю. Однако это время ни минимально, ни максимально — оно *постоянно*. Именно по этой причине любой луч, вышедший из F_1, обязательно пройдет через F_2, в какой бы точке зеркала он ни отразился. Убедиться в этом можно с помощью таких же рассуждений, какие были приведены в пункте 3.

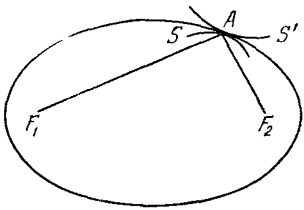

Рис. 26.

Вообразим теперь зеркало S, касающееся эллипсоида в точке A, обращенное вогнутостью в ту же сторону, что и эллипсоид, но имеющее бо́льшую кривизну. Световой луч F_1A после отражения от этого зеркала снова попадает в точку F_2. Однако при смещении точки A по поверхности зеркала S длина ломаной F_1AF_2 уменьшается. Следовательно, время распространения света из F_1 в F_2 вдоль действительного пути *максимально*. Наоборот, если взять зеркало S', имеющее в точке касания меньшую кривизну, чем эллипсоид, или обращенное вогнутостью в противоположную сторону, то время распространения света вдоль действительного пути будет *минимально*. В частности, оно минимально при отражении от *плоского зеркала*. Допустим, наконец, что зеркало SAS' имеет в A *точку перегиба*. Тогда при смещении точки падения луча по поверхности этого зеркала время распространения либо увеличится, либо уменьшится, либо останется неизменным, в зависимости от направления смещения.

6. Чтобы разобрать случай преломления, введем понятие *анаберрационной поверхности*. Пусть точка P находится в однородной среде с показателем преломления n, а точка P' — в однородной среде с показателем преломления n' (рис. 27). Поверхность AA', вдоль которой среды граничат друг с другом, называется *анаберрационной*, если любая точка A этой поверхности удовлетворяет условию

$$n \cdot PA + n' \cdot AP' = C = \text{const}.$$

Для случая преломления анаберрационная поверхность имеет форму так называемого *картезианского овала* (см. задачу 2 к § 9). Он обращен вогнутостью в сторону более преломляющей среды ($n' > n$). Анаберрационная поверхность делит пространство на две части, обладающие следующим свойством. Если точка M расположена в менее преломляющей среде, то сумма $n \cdot PM + n' \cdot MP'$

больше C; если же она лежит в более преломляющей среде, то эта сумма меньше C.

Докажем следующую теорему. *Луч света, вышедший из точки P, после преломления на анаберрационной поверхности обязательно пройдет через точку P'*. Действительно, пусть PA — падающий луч, а $\mathbf{s}$ — единичный вектор, направленный вдоль него. Соединим точку A с точкой P' и обозначим через $\mathbf{s}'$ единичный вектор, направленный вдоль прямой AP'. По определению анаберрационной поверхности вариация оптической длины ломаной PAP' при смещении точки A по анаберрационной поверхности будет равна нулю. Поэтому, применяя такие же рассуждения, какие были проведены в пункте 2, найдем, что вектор $n\mathbf{s} - n'\mathbf{s}'$ перпендикулярен к анаберрационной поверхности в точке A. Отсюда следует, что AP' дает направление преломленного луча.

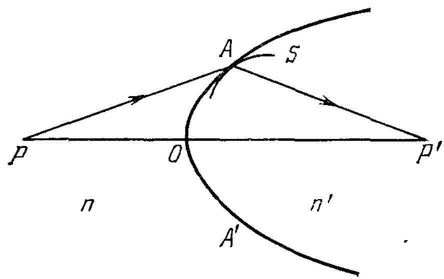

Рис. 27.

Доказанной теореме можно дать также следующую формулировку. *Если AA' — анаберрационная поверхность относительно пары точек P и P', то каждая из этих точек будет оптическим изображением другой при преломлении лучей на этой анаберрационной поверхности*. При этом на угловую ширину пучка лучей не накладывается никаких ограничений.

Вернемся к исследованию характера экстремума оптической длины луча при преломлении. Наши рассуждения ничем не будут отличаться от рассуждений, проведенных выше для эллипсоидального зеркала. Допустим, например, что среды граничат друг с другом вдоль поверхности S (рис. 27), касающейся анаберрационной поверхности в точке A. Тогда падающий луч после преломления в точке A опять пройдет через точку P'. Пусть поверхность S обращена вогнутостью в ту же сторону, что и анаберрационная поверхность, и имеет в точке касания бо́льшую кривизну. Тогда при смещении точки падения вдоль S она окажется в менее преломляющей среде. Следовательно, смещенный путь будет иметь *меньшую оптическую длину*, чем действительный: время распространения света вдоль действительного пути *максимально*. Напротив, когда кривизна поверхности S в точке касания A меньше кривизны анаберрационной поверхности, а также тогда, когда поверхность S обращена вогнутостью в противоположную сторону, то время распространения вдоль действительного пути *минимально*. В частности, оно минимально при преломлении на *плоской поверхности*.

ЗАДАЧА

Система лучей называется *ортотомной*, если все лучи этой системы ортогональны к одной и той же поверхности. Пользуясь принципом Ферма, доказать *теорему Малюса: ортотомная система лучей остается ортотомной после произвольного числа отражений и преломлений.*

Решение. Пусть все лучи перпендикулярны к поверхности F (рис. 28). Проведем через каждую точку этой поверхности луч и отложим на нем отрезок постоянной (но произвольной) оптической длины L. Геометрическим местом концов таких отрезков будет какая-то поверхность F'. Докажем, что все лучи рассматриваемой системы перпендикулярны к поверхности F', каково бы ни было значение величины L.

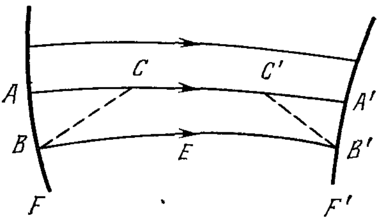

Рис. 28.

Малые отрезки одного из лучей AC и $C'A'$ могут считаться прямолинейными. Возьмем соседний бесконечно близкий луч и притом такой, что длины AB и $A'B'$ бесконечно малы по сравнению с AC и $C'A'$. Соединим B с C и C' с B' прямолинейными отрезками. По принципу Ферма с точностью до бесконечно малых второго или высшего порядков $(BEB') = (BCC'B')$, а по построению $(BEB') = (ACC'A')$. Таким образом, $(BCC'B') = (ACC'A')$. Вычитая отсюда общую часть (CC'), получим: $(AC) + (C'A') = (BC) + (C'B')$. Так как по условию отрезок AC перпендикулярен к AB, то с точностью до второго порядка малости $AC = BC$, а следовательно, $(AC) = (BC)$. Поэтому с той же точностью $(C'A') = (C'B')$, или $C'A' = C'B'$, откуда следует, что $C'A' \perp A'B'$.

С точки зрения волновой теории теорема Малюса почти самоочевидна. Действительно, для ортотомной системы лучей поверхность F есть одна из *поверхностей равной фазы* (волновой фронт). Распространяясь по законам геометрической оптики, она продолжает оставаться поверхностью равной фазы, а совокупность лучей — *ортогональной системой*. Конечно, ортогональность может и не соблюдаться. Например, волны вида (6.5) при соблюдении принципа суперпозиции распространяются независимо друг от друга. Каждой из таких волн соответствует ортотомная система лучей. Однако совокупность лучей, соответствующих *всем волнам*, ортотомную систему, вообще говоря, не образует.

§ 8. Групповая скорость

1. До сих пор при рассмотрении скорости распространения волн мы предполагали, что соблюдается принцип суперпозиции и отсутствует дисперсия. При несоблюдении принципа суперпозиции и наличии дисперсии вопрос о скорости распространения волн становится очень сложным. *Ниже предполагается, что принцип суперпозиции соблюдается, но имеется дисперсия.* Сначала рассмотрим плоские волны, распространяющиеся в одном направлении, принимаемом за направление оси X.

Бегущую плоскую монохроматическую волну запишем в виде

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \delta), \tag{8.1}$$

где E_0 и δ — постоянные. При рассмотрении таких волн дисперсия не играет роли, поскольку частота ω имеет единственное значение.