ЗАДАЧА

Система лучей называется *ортотомной*, если все лучи этой системы ортогональны к одной и той же поверхности. Пользуясь принципом Ферма, доказать *теорему Малюса: ортотомная система лучей остается ортотомной после произвольного числа отражений и преломлений.*

Решение. Пусть все лучи перпендикулярны к поверхности F (рис. 28). Проведем через каждую точку этой поверхности луч и отложим на нем отрезок постоянной (но произвольной) оптической длины L. Геометрическим местом концов таких отрезков будет какая-то поверхность F'. Докажем, что все лучи рассматриваемой системы перпендикулярны к поверхности F', каково бы ни было значение величины L.

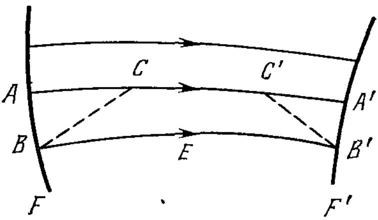

Рис. 28.

Малые отрезки одного из лучей AC и $C'A'$ могут считаться прямолинейными. Возьмем соседний бесконечно близкий луч и притом такой, что длины AB и $A'B'$ бесконечно малы по сравнению с AC и $C'A'$. Соединим B с C и C' с B' прямолинейными отрезками. По принципу Ферма с точностью до бесконечно малых второго или высшего порядков $(BEB') = (BCC'B')$, а по построению $(BEB') = (ACC'A')$. Таким образом, $(BCC'B') = (ACC'A')$. Вычитая отсюда общую часть (CC'), получим: $(AC) + (C'A') = (BC) + (C'B')$. Так как по условию отрезок AC перпендикулярен к AB, то с точностью до второго порядка малости $AC = BC$, а следовательно, $(AC) = (BC)$. Поэтому с той же точностью $(C'A') = (C'B')$, или $C'A' = C'B'$, откуда следует, что $C'A' \perp A'B'$.

С точки зрения волновой теории теорема Малюса почти самоочевидна. Действительно, для ортотомной системы лучей поверхность F есть одна из *поверхностей равной фазы* (волновой фронт). Распространяясь по законам геометрической оптики, она продолжает оставаться поверхностью равной фазы, а совокупность лучей — *ортогональной системой*. Конечно, ортогональность может и не соблюдаться. Например, волны вида (6.5) при соблюдении принципа суперпозиции распространяются независимо друг от друга. Каждой из таких волн соответствует ортотомная система лучей. Однако совокупность лучей, соответствующих *всем волнам*, ортотомную систему, вообще говоря, не образует.

§ 8. Групповая скорость

1. До сих пор при рассмотрении скорости распространения волн мы предполагали, что соблюдается принцип суперпозиции и отсутствует дисперсия. При несоблюдении принципа суперпозиции и наличии дисперсии вопрос о скорости распространения волн становится очень сложным. *Ниже предполагается, что принцип суперпозиции соблюдается, но имеется дисперсия.* Сначала рассмотрим плоские волны, распространяющиеся в одном направлении, принимаемом за направление оси X.

Бегущую плоскую монохроматическую волну запишем в виде

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \delta), \tag{8.1}$$

где E_0 и δ — постоянные. При рассмотрении таких волн дисперсия не играет роли, поскольку частота ω имеет единственное значение.

Для выяснения смысла скорости распространения рассмотрим уравнение

$$\omega t - kx + \delta = \text{const}, \tag{8.2}$$

Это есть уравнение плоскости, перпендикулярной к оси X, на которой постоянна фаза волны. Дифференцируя его, получим: $\omega\,dt - k\,dx = 0$, откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \tag{8.3}$$

Таким образом, ω/k есть *скорость распространения поверхности постоянной фазы*, ранее обозначавшаяся через v. Она называется *фазовой скоростью волны*. С такой скоростью распространяется синусоидальная волна типа (8.1) без изменения своей формы.

Если бы среда не обладала дисперсией, то говорить о какой-либо другой скорости распространения волны не было бы необходимости. Действительно, произвольное плоское возмущение, распространяющееся в направлении оси X, согласно теореме Фурье можно представить в виде суперпозиции монохроматических волн вида (8.1). При отсутствии дисперсии все эти волны имели бы одну и ту же фазовую скорость, так что форма возмущения все время оставалась бы *одной и той же*. Возмущение в целом бежало бы вперед без изменения вида со скоростью, равной той же фазовой скорости. Не то будет при наличии дисперсии. Тогда монохроматические волны разных частот будут распространяться вперед с разными скоростями, вследствие чего форма всего возмущения будет *непрерывно деформироваться* (исключение составляют только монохроматические волны, распространяющиеся по-прежнему без изменения формы). В этих условиях понятие скорости распространения утрачивает тот ясный смысл, какой оно имело при отсутствии дисперсии. При определенных условиях, однако, можно сохранить представление о скорости распространения немонохроматических волн и в средах, обладающих дисперсией. Важнейшей после фазовой скорости является так называемая *групповая скорость*.

2. Рассмотрим сначала в действительности не существующую непоглощающую среду, в которой фазовая скорость v выражается линейной функцией длины волны λ:

$$v = a + b\lambda, \tag{8.4}$$

а следовательно, частота ω — линейной функцией волнового числа k:

$$\omega = ak + 2\pi b. \tag{8.5}$$

Произвольное плоское возмущение, распространяющееся в среде, разложим на монохроматические волны. Их число, вообще говоря, будет бесконечно велико. Однако можно ограничиться случаем, когда оно равно трем. Это, как будет видно из дальнейшего, не отразится на общности рассуждений и результатов. На рис. 29 представлены эти три синусоиды в какой-то момент времени. Форма результирующего возмущения зависит от их взаимного расположения. Не нарушая общности, можно принять, что в этот момент какие-то три гребня синусоид A, B, C пространственно совпадают друг с другом.

Допустим ради определенности, что фазовая скорость v возрастает с возрастанием длины волны λ (если предположить противоположное, то рассуждения и окончательный результат не изменятся).

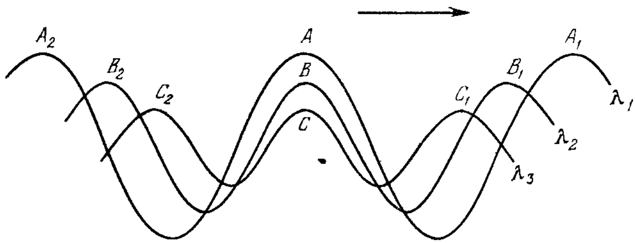

Рис. 29.

Таким образом, если $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, а v_1, v_2, v_3 — соответствующие фазовые скорости, то $v_1 > v_2 > v_3$. При распространении, например, вправо более длинные волны будут обгонять более короткие, что приведет к непрерывному изменению формы результирующего возмущения. Гребни A, B, C начнут расходиться, гребни A_1, B_1, C_1 разойдутся еще больше, а гребни A_2, B_2, C_2 будут сближаться. Если начало координат поместить в точку, в которой находились гребни A, B, C в начальный момент, то координаты гребней A_2, B_2, C_2 в произвольный момент времени t представятся выражениями

$$x_{A_2}(t) = v_1 t - \lambda_1, \quad x_{B_2}(t) = v_2 t - \lambda_2, \quad x_{C_2}(t) = v_3 t - \lambda_3.$$

В момент времени τ, определяемый условиями

$$v_1\tau - \lambda_1 = v_2\tau - \lambda_2 = v_3\tau - \lambda_3,$$

т. е.

$$\tau = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{v_1 - v_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{v_2 - v_3} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{v_1 - v_3} = \frac{d\lambda}{dv} = \frac{1}{b},$$

гребни A_2, B_2, C_2 пространственно совпадут, так что первоначальное взаимное расположение синусоид, а с ним и форма всего возмущения восстановятся. Только роль гребней A, B, C перейдет к гребням A_2, B_2, C_2, что, очевидно, никак не может отразиться на форме результирующего возмущения. Полученный результат при линейном законе дисперсии (8.4), имеет общее значение, т. е. справедлив для произвольного числа синусоид и произвольного начального расположения их.

Таким образом, *по истечении времени $\tau = d\lambda/dv$, называемого временем восстановления, происходит периодическое восстановление формы возмущения*. Например, в рассмотренном нами случае трех синусоид в начале координат, где накладывались гребни A, B, C, в начальный момент времени был максимум возмущения. В точности такой же максимум появился через время τ в другом месте пространства, где наложились гребни A_2, B_2, C_2. Распространение возмущения носит как бы прыгающий характер, причем от прыжка к прыжку проходит время τ. Естественно определить скорость возмущения как отношение расстояния, проходимого возмущением за один «прыжок», к промежутку времени между последовательными прыжками. Так определенная величина называется *групповой скоростью* возмущения. В разобранном примере это будет отношение расстояния между двумя последовательными положениями максимума возмущения к времени восстановления τ. В момент времени $t = 0$ координата максимума $x_{\text{макс}}(0) = 0$. В момент τ координата такого же максимума будет

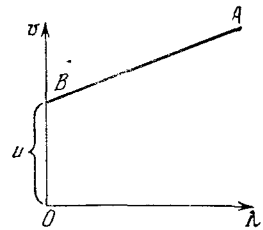

Рис. 30.

$$x_{\text{макс}}(\tau) = v_1\tau - \lambda_1 = v_2\tau - \lambda_2 = v_3\tau - \lambda_3 = v\tau - \lambda.$$

За время τ максимум проходит путь

$$x_{\text{макс}}(\tau) - x_{\text{макс}}(0) = v\tau - \lambda.$$

Следовательно, групповая скорость будет $u = v - \lambda/\tau$, или

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \tag{8.6}$$

Эта формула впервые была получена Рэлеем (1842—1919) и носит его имя. На рис. 30 приведена графическая интерпретация этой формулы, принадлежащая П. С. Эренфесту (1880—1933). На нем в координатах λ, v представлен график AB прямой (8.4). Так как $u = v - \lambda\, dv/d\lambda = a$, то эта прямая отсекает на оси ординат отрезок BO, длина которого равна групповой скорости u. Формулу (8.6) можно записать в виде

$$u = v + \frac{1}{\lambda}\frac{dv}{d(1/\lambda)} = \frac{d}{d(1/\lambda)}\left(\frac{v}{\lambda}\right),$$

или

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \tag{8.7}$$

Легко также преобразовать (8.6) к виду

$$u = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right). \tag{8.8}$$

3. Полученные результаты строго справедливы при линейном законе дисперсии (8.4) (или (8.5)). Однако, если возмущение занимает небольшую спектральную область, то эти результаты остаются приближенно верными и в диспергирующих непоглощающих средах. Возмущение такого типа называется *группой волн*. Точнее, *группой волн называется волновое образование, занимающее столь узкую спектральную область, что в пределах этой области приращение фазовой скорости v с достаточной точностью может считаться пропорциональным соответствующему приращению длины волны λ, а следовательно, приращение частоты ω — пропорциональным соответствующему приращению волнового числа k.* Это значит, что в пределах рассматриваемой спектральной области обе зависимости $v = v(\lambda)$ и $\omega = \omega(k)$ могут быть аппроксимированы линейными функциями λ и k, а именно

$$v = v(\lambda_0) + \left(\frac{dv}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}(\lambda - \lambda_0), \tag{8.9}$$

$$\omega = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}(k - k_0), \tag{8.10}$$

где λ_0 — какая-то длина волны, лежащая внутри спектральной области, занимаемой группой, а $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — соответствующее ей волновое число. При допустимости такой аппроксимации можно говорить и о времени приближенного восстановления формы возмущения $\tau = d\lambda/dv$, и о распространении возмущения с групповой скоростью u, определяемой выражением (8.6) или (8.7). На диаграмме Эренфеста в случае группы волн играет роль только малый участок кривой $v = v(\lambda)$, который можно приближенно считать прямолинейным и заменить соответствующим отрезком касательной. Групповая скорость u представится длиной отрезка OB, отсекаемого этой касательной на оси ординат (рис. 31).

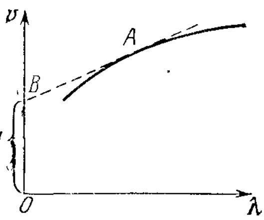

Рис. 31.

4. Учет высших членов в разложении (8.9) или (8.10) приводит к следующему характеру распространения возмущения. Возмущение идет вперед, но его форма непрерывно изменяется. Однако по истечении времени $\tau = d\lambda/dv$ возмущение принимает форму, почти совпадающую с исходной, причем за это время оно продвигается вперед на расстояние $x = u\tau$. Можно сказать, что происходит передача энергии возмущения с групповой скоростью u. По истечении последующего промежутка времени той же длительности произойдет то же самое, и т. д. Вообще, в любой момент $t + \tau$ возмущение воспроизводит с малыми искажениями свою форму, какую оно имело в момент t, перемещаясь за время τ на расстояние $u\tau$. Но если возмущение распространяется достаточно долго, то малые изменения, претерпеваемые им за следующие друг за другом равные промежутки времени длительностью τ, будут накапливаться и могут настолько сильно исказить само возмущение, что его форма потеряет всякое сходство с исходной.

Чтобы оценить требующееся для этого время, дополним разложение (8.10) членом второй степени по $(k - k_0)$. С учетом формулы (8.7) можно написать:

$$\omega = \omega_0 + u_0 (k - k_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dk}\right)_0 (k - k_0)^2,$$

где нуликом обозначены значения соответствующих величин при $k = k_0$. Пусть δk — максимальное значение разности $k - k_0$. Тогда соответствующее максимальное изменение фазы, обусловленное наличием квадратичного члена, будет $\frac{t}{2}\left|\frac{du}{dk}\right|(\delta k)^2$. Если это изменение мало по сравнению с величиной порядка π, то оно мало скажется на относительной разности фаз между синусоидами, входящими в группу, и тогда форма возмущения будет мало искажаться наличием квадратичного члена. Таким образом, чтобы на интервале времени t происходило периодическое восстановление исходной формы возмущения, необходимо выполнение условия

$$t \ll \frac{2\pi}{|du/dk|(\delta k)^2}. \tag{8.11}$$

Если перейти к длинам волн, то это условие преобразуется к виду

$$t \ll \frac{\lambda^2}{|du/d\lambda|(\delta\lambda)^2}. \tag{8.12}$$

Если же интервал времени t порядка или больше правой части этого неравенства, то о восстановлении исходной формы возмущения говорить не приходится.

5. Выше предполагалось, что плоские монохроматические волны, входящие в волновое образование, распространяются *в одном и том же направлении*. Рассмотрим теперь случай, когда такие волны занимают по-прежнему узкую область частот, но распространяются в разных направлениях, лежащих в пределах узкого конуса. Соответствующее волновое образование называется *волновым пакетом*. Его можно представить тройным интегралом

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t) = \int\limits_{k_{0x}-\Delta k_x}^{k_{0x}+\Delta k_x} \int\limits_{k_{0y}-\Delta k_y}^{k_{0y}+\Delta k_y} \int\limits_{k_{0z}-\Delta k_z}^{k_{0z}+\Delta k_z} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})\, e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}\, dk_x\, dk_y\, dk_z,$$

или сокращенно

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t) = \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})\, e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}\, d\boldsymbol{k}. \tag{8.13}$$

Частоту ω следует рассматривать как функцию волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Видом этой функции определяется *закон дисперсии волн*. Если среда *изотропна*, то функция $\omega(\boldsymbol{k})$ может зависеть только от *длины вектора* $\boldsymbol{k}$, но не от его направления. Но в *анизотропных средах*, например кристаллах, необходимо учитывать и зависимость ω *от направления* $\boldsymbol{k}$. Поэтому ниже вид функции $\omega(\boldsymbol{k})$ не конкретизируется, а рассуждения проводятся в общем виде. Полагая $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0 + \Delta\boldsymbol{k}$, аппроксимируем $\Delta\omega$ линейным выражением

$$\Delta\omega = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\Delta k_x + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\Delta k_y + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\Delta k_z = (\boldsymbol{u}\,\Delta\boldsymbol{k}), \tag{8.14}$$

где через $\boldsymbol{u}$ обозначен вектор с компонентами

$$u_x = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}, \quad u_y = \frac{\partial\omega}{\partial k_y}, \quad u_z = \frac{\partial\omega}{\partial k_z}. \tag{8.15}$$

Сокращенно его записывают в символической форме:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}. \tag{8.16}$$

После подстановки соответствующих значений в выражение (8.13) оно преобразуется в

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)\, e^{i(\omega_0 t - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r})}, \tag{8.17}$$

где введено обозначение

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t) = \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})\, e^{i(\Delta\omega t - \Delta\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}\, d\boldsymbol{k} = \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})\, e^{i(\boldsymbol{u}t - \boldsymbol{r})\Delta\boldsymbol{k}}\, d\boldsymbol{k}.$$

Отсюда видно, что в точке M, движущейся со скоростью $\boldsymbol{u}$ по закону $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}t + \boldsymbol{r}_0$ ($\boldsymbol{r}_0 = \text{const}$), амплитуда $\boldsymbol{A}$ остается постоянной. В такой точке совершаются гармонические колебания

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}e^{i(\omega_0 t - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r})} = \boldsymbol{A}e^{i[(\omega_0 - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{u})t - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r}_0]}$$

с частотой $\omega_0 - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{u}$. По истечении времени τ фаза этих колебаний изменяется на $(\omega_0 - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{u})\,\tau$. Если это изменение равно 2π, т. е.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0 - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{u}} \approx \frac{2\pi}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}}, \tag{8.18}$$

то вектор $\boldsymbol{E}$ в движущейся точке M в любой момент времени t примет то же значение, какое он имел в более ранний момент $t - \tau$. Так как это справедливо при любом значении параметра $\boldsymbol{r}_0$, то происходит периодическое восстановление формы возмущения с периодом τ, причем за это время возмущение перемещается вперед на расстояние $\boldsymbol{u}\tau$. В результате мы снова приходим к представлению о распространении возмущения с групповой скоростью $\boldsymbol{u}$, определяемой выражением (8.16).

В изотропных средах векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{k}$ параллельны. В этом случае (8.18) легко преобразовать к прежнему виду $\tau = d\lambda/dy$. Однако в анизотропных средах векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{k}$, вообще говоря, не параллельны, и надо пользоваться более общими выражениями (8.16) и (8.18).

Конечно, и здесь из-за наличия членов высших степеней, отброшенных в разложении (8.14), за время τ происходит не точное, а лишь *приближенное* восстановление формы возмущения. За это время возмущение претерпевает малые, может быть едва заметные, искажения. Но на больших интервалах времени эти искажения накапливаются и исходная форма возмущения сможет претерпеть существенные изменения.

6. Изложенные соображения позволяют легко решить вопрос о *скорости движения энергии* или *светового сигнала* в диспергирующих средах в тех областях спектра, в которых применимо понятие групповой скорости (т. е. вдали от полос поглощения). Прежде всего заметим, что фазовая скорость не имеет ничего общего со скоростью движения энергии. Фазовой скоростью устанавливается только связь *между фазами колебаний* в различных точках пространства. Связь такого типа в принципе может существовать и без передачи энергии, как это видно из следующего примера.

Вообразим длинную цепочку спортсменов, расположенных вдоль прямой линии на равных расстояниях друг от друга. Пусть они выполняют одно и то же гимнастическое упражнение, например периодическое движение руками, и притом так, что каждый впереди стоящий спортсмен начинает движение с некоторым запаздыванием по отношению к спортсмену, стоящему за ним. Пусть время запаздывания одно и то же для всех спортсменов. При наблюдении со стороны будет казаться, что по цепочке бежит волна с определенной фазовой скоростью, значение которой зависит от расстояния между соседними спортсменами и от времени запаздывания, о котором говорилось выше. Наличие такой волны, конечно, не означает, что каждый спортсмен приводит в движение впереди стоящего спортсмена. Так и возможность распространения в среде плоской монохроматической волны еще не дает оснований для заключения о переносе энергии с фазовой скоростью.

Строго плоская монохроматическая волна непригодна для наблюдения передачи энергии, поскольку она не имеет ни начала, ни конца во времени и в пространстве. Сама постановка вопроса о передаче энергии требует отказа от такой идеализации. Необходимо перейти к волновому возмущению, *ограниченному в пространстве* по крайней мере с одного конца, т. е. имеющему передовой фронт, перед которым возмущение отсутствует. Подходящим волновым образованием может служить группа волн. Если выполнено условие (8.12), то средняя скорость энергии, переносимой группой, совпадает с групповой скоростью. Действительно, форма группы, какую она имела в момент t, восстанавливается без заметного искажения в более поздний момент времени $t + \tau$. При этом группа вместе с локализованной в ней энергией за время τ перемещается вперед на расстояние $x = u\tau$. Так как такое восстановление формы имеет место, каков бы ни был момент времени t, то движение энергии с групповой скоростью будет происходить на протяжении как угодно длинного промежутка времени, даже если за это время группа существенно изменит свою форму.

Итак, в области, далекой от области сильного поглощения, скорость движения энергии в группе волн совпадает с групповой скоростью. То же самое приближенно справедливо и для скорости движения энергии в волновом возмущении, занимающем сравнительно широкую спектральную область, если только в пределах этой спектральной области групповая скорость $u = u(\lambda)$ меняется мало. Если ширина спектральной области $\delta\lambda$, занимаемой группой, стремится к нулю, то группа в пределе переходит в монохроматическую волну. Можно поэтому сказать, что средняя скорость переноса энергии в монохроматической волне совпадает с групповой скоростью. Это утверждение следует понимать именно в приведенном смысле, рассматривая монохроматическую волну как предельный случай квазимонохроматической. Нельзя ограничиться идеализированной плоской строго монохроматической волной, отвлекаясь от представления ее как предельного случая квазимонохроматической волны. При такой абстрактной постановке вопроса утрачивается связь с реальными явлениями, а потому с точки зрения физики она бессмысленна.

Прямые измерения скорости света сводятся к измерению расстояния, проходимого световым сигналом за определенный промежуток времени. Из изложенного выше следует, что этот метод практически дает групповую скорость. То же самое, как показывает подробный анализ, относится ко всем известным косвенным методам измерения скорости света. Фазовую скорость, точнее — отношение фазовых скоростей в двух различных средах, можно определить по отношению показателей преломления, используя формулу волновой теории (3.7), в которую входят фазовые скорости света в рассматриваемых средах (см. § 64).

7. Остановимся еще на вопросе о *скорости распространения передового фронта волнового возмущения*. Речь идет о волне, резко ограниченной передовым фронтом, перед которым никакого возмущения нет. Скорость такого фронта точно совпадает со скоростью света в вакууме c. В этом легко убедиться, исходя из основных представлений электронной теории. Согласно этой теории, всякую среду следует рассматривать как вакуум, в который вкраплены молекулы и атомы вещества. Свет распространяется в вакууме между атомами и молекулами вещества, т. е. всегда со скоростью c. Когда световое возмущение достигает какого-либо атома, электроны и атомные ядра приходят в колебания и сами становятся центрами излучения новых электромагнитных волн. Эти вторичные волны накладываются на первичную волну и тем самым определяют все волновое поле в среде. Но из-за инерции электроны и ядра не сразу приходят в колебания. Пока электроны и ядра не пришли

в колебания, они не излучают вторичные волны, а потому не оказывают влияния на распространение возмущения. Поэтому ясно, что передовой фронт должен распространяться в среде с той же скоростью, что и в вакууме. Но почему же при измерении скорости света получается не c, а другая величина? Дело в том, что передовой фронт несет слишком малую энергию, а приемники света недостаточно чувствительны, чтобы ее обнаружить. Количественные расчеты, выполненные впервые Зоммерфельдом (1868—1951) и более подробно Л. Бриллюэном (1889—1969), показали, что это действительно так.