ГЛАВА II

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

* *

§ 9. Понятие оптического изображения

1. Если пучок световых лучей, исходящий из какой-либо точки P, в результате отражений, преломлений или изгибаний в неоднородной среде сходится в точке P', то P' называется *оптическим изображением* или просто *изображением точки* P. Точку P' называют также *фокусом геометрического схождения лучей*. Изображение P' называется *действительным*, если световые лучи действительно пересекаются в точке P'. Если же в P' пересекаются продолжения лучей, проведенные в направлении, обратном распространению света, то изображение называется *мнимым*. При помощи оптических приспособлений мнимые изображения могут быть преобразованы в действительные. Например, в нашем глазу мнимое изображение преобразуется в действительное, получающееся на сетчатке глаза.

Если в некоторый момент времени изменить на противоположное направление магнитного или электрического вектора, то, согласно *принципу обратимости* (см. т. III, § 83, пункт 8), форма лучей остается без изменения, но направление распространения света изменится на противоположное. Точка P' будет играть роль *источника света*, а P — *его изображения*. Поэтому P и P' называются *сопряженными* или *взаимно сопряженными точками*. Аналогично, две линии или две поверхности называются *сопряженными*, если одна из них является оптическим изображением другой.

Если желают подчеркнуть, что лучи строго пересекаются в точке P', то изображение называют *стигматическим*. Пучок же лучей, исходящих из одной точки или сходящихся в одной точке, называется *гомоцентрическим*. Примером может служить отражение от *эллипсоидального зеркала*. По свойству эллипсоида вращения прямые FA и $F'A$ (рис. 32), соединяющие его фокусы F и F' с произвольной точкой A поверхности эллипсоида, наклонены под одинаковыми углами к этой поверхности. Поэтому все лучи, вышедшие из одного фокуса, после отражения от поверхности эллипсоида пересекутся в другом фокусе. Практически более важен случай *параболоидального зеркала*, используемого в астрономических телескопах-рефлекторах. Параболоидальное зеркало есть частный случай эллипсоидального, когда один из фокусов F' удален в бесконечность. В силу известного свойства параболы все лучи, параллельные оси параболоида, после отражения от его вогнутой поверхности пересекутся в фокусе параболоида F (рис. 33). Если же такие лучи отразятся от выпуклой поверхности параболоида, то в фокусе F пересекутся продолжения отраженных лучей (рис. 34). Стигматическое изображение точки P в виде точки P' получается также при преломлении на поверхности, являющейся *анаберрационной* для этой пары точек (см. § 7 и задачи к настоящему параграфу).

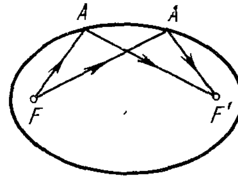

Рис. 32.

На практике случаи стигматических изображений, как правило, бывают исключениями. Обычно лучи пересекаются не строго в одной точке, а в некоторой окрестности ее. Изображением светящейся точки на экране будет в этих случаях не математическая точка, а *светлое пятнышко*. Это снижает качество изображения. Однако строго точечное изображение светящейся точки не получается даже в тех случаях, когда по законам геометрической оптики лучи должны точно пересекаться в одной точке. Из-за дифракции света изображение светящейся точки получается в виде светлого кружка, окруженного темными и светлыми кольцами.

Полная — *физическая* — теория оптических изображений должна учитывать *волновые свойства света*. Но начинать с такой теории,

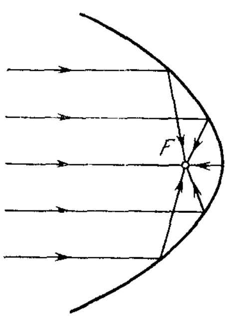

Рис. 33.

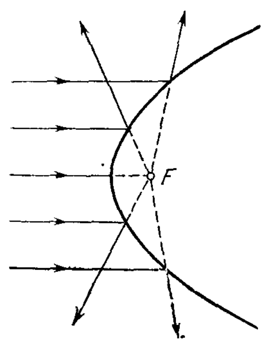

Рис. 34

из-за ее сложности, было бы нецелесообразно. Сначала надо уяснить получение изображений с простейшей — *геометрической* — точки зрения, а затем ввести поправки, учитывающие волновую природу света. Геометрическая теория строится на основе одних только законов отражения и преломления света, полностью отвлекаясь от его физической природы. Таким путем, конечно, нельзя установить границы применимости геометрической теории. Это можно сделать только на основе волновой теории. Но значение последней этим не исчерпывается. Более существенно, что волновая теория позволяет определить, *что принципиально возможно в оптике*, и указать, как этого достигнуть.

2. Непрерывная совокупность точек, изображаемых оптической системой, называется *пространством предметов*. Непрерывная же совокупность точек, являющихся их изображениями, называется *пространством изображений*. Одна и та же точка может принадлежать к пространству предметов и к пространству изображений, в зависимости от того, рассматривается ли она как *предмет* или как *изображение*. Показатель преломления пространства предметов будем обозначать через n, а пространства изображений — через n'. В оптических приборах световой оптики величины n и n' всегда постоянны, т. е. не меняются от точки к точке. Когда изображение действительное, под n' следует понимать показатель преломления среды *в той точке, где получилось это изображение*. В случае мнимого изображения n' не всегда совпадает с показателем преломления среды в месте нахождения точки P'. Значение n' относится *к той среде, через которую проходят действительные лучи, продолжения которых пересекаются в точке* P'.

Мы будем исследовать и такие случаи, когда показатель преломления среды меняется *непрерывно* от точки к точке, а потому лучи *криволинейны*. Такой случай практически реализуется в *электронной оптике*. Здесь роль линз выполняют *электрические и магнитные поля*, а показателя преломления — *скорость электрона* (см. § 4).

3. С математической точки зрения задача геометрической теории оптических изображений сводится к определению положения изображения при любом заданном положении предмета. При этом общие свойства оптических систем удобно исследовать с помощью следующего положения. *Оптические длины всех лучей, соединяющих сопряженные точки P и P', одинаковы*. Это непосредственно очевидно, когда изображение P' действительное, так как тогда сферическая волна, вышедшая из P, превращается в сферическую волну, сходящуюся в P'. *Оптические же длины всех лучей от одного положения волнового фронта до другого одинаковы*. Но это положение можно распространить и на *мнимые изображения*. В этом случае не существует лучей, соединяющих P с P'. Роль луча играет прямолинейное продолжение его в сторону изображения P'. По аналогии с мнимым изображением такое продолжение можно назвать *мнимым лучом*.

Оптическую длину луча следует считать *положительной*, когда он проходится в направлении распространения света, и *отрицательной* в противоположном случае. Чтобы в случае мнимых изображений избежать неопределенности, будем предполагать, что пространство изображений *однородно*, т. е. световые лучи в нем *прямолинейны*. Это не значит, что изображение P' должно обязательно получаться в том месте, где среда однородна. Требуется только, чтобы действительные световые лучи, продолжения которых сходятся в P', были *прямолинейны*.

После этих замечаний обратимся к доказательству нашего утверждения. Пусть лучи PAC и PBD (рис. 35), вышедшие из точки P, на участках AC и BD прямолинейны. Их продолжения пересекаются в точке P', являющейся мнимым изображением точки P. Волновой фронт в однородном пространстве изображений будет иметь форму сферы CD с центром в P'. Очевидно,

$$(PAC) = (PBD), \quad (P'AC) = (P'BD).$$

Почленное вычитание дает

$$(PA) - (P'A) = (PB) - (P'B).$$

Но, согласно нашему правилу знаков,

$$(PA) - (P'A) = (PA) + (AP') = (PAP'),$$
$$(PB) - (P'B) = (PB) + (BP') = (PBP').$$

Следовательно, $(PAP') = (PBP')$, что и требовалось доказать.

Доказанное свойство оптических длин эквивалентно утверждению, что *свет затрачивает одно и то же время, распространяясь*

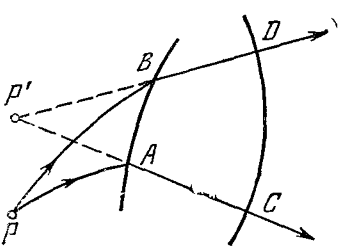

Рис. 35.

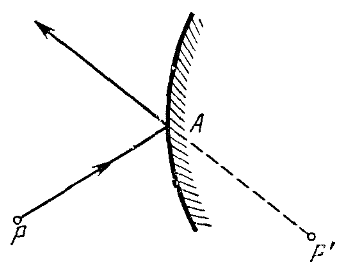

Рис. 36.

вдоль различных лучей от точечного источника до его изображения. В таком виде это утверждение называется *принципом таутохронизма* (равенства времен распространения). Принципом таутохронизма мы воспользуемся при изучении явлений интерференции.

Наряду с мнимыми изображениями, следует ввести и *мнимые источники света*, или *мнимые объекты*. Точечный объект называется *мнимым*, если он является точкой пересечения продолжений действительных лучей, проведенных в обратных направлениях. Мнимый объект можно рассматривать как источник *мнимых лучей*. Из множества точечных мнимых объектов составляются мнимые объекты конечных размеров.

Введение мнимых объектов и мнимых лучей освобождает теорию от необходимости раздельного рассмотрения действительных и мнимых изображений. Отпадает также необходимость в раздельном рассмотрении преломления и отражения света, что имеет большое значение в теории оптических систем, содержащих большое количество преломляющих и отражающих поверхностей. Действительно, пусть P' — мнимое изображение точки P, полученное в результате отражения света от зеркала (рис. 36). Согласно принятому нами правилу знаков, оптическая длина мнимого луча AP' отрицательна. Поэтому для оптической длины пути PAP' можно написать:

$$(PAP') = n\,|PA| - n\,|AP'| = n\,|PA| + n'\,|AP'|,$$

где $n' = -n$. Поэтому *отражение формально математически можно рассматривать как преломление, если только показателю преломления n' приписать отрицательное значение* ($n'/n = -1$).

ЗАДАЧИ

1. Две однородные среды с показателями преломления n и n' граничат друг с другом вдоль поверхности S (рис. 37), являющейся поверхностью вращения вокруг оси OP' (оптической оси). Найти форму поверхности S, при которой она будет анаберрационной для пары точек P и P', лежащих на оптической оси, из которых точка P удалена в бесконечность, а P' может занимать любое положение на оптической оси.

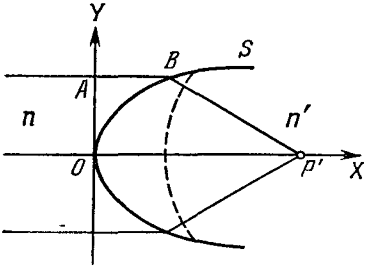

Рис. 37.

Решение. Примем оптическую ось за координатную ось X, начало координат поместим в точке пересечения ее с поверхностью S, ось Y направим вверх перпендикулярно к оптической оси. Так как оптические длины лучей от бесконечно удаленной точки P до плоскости OA одинаковы, то условие анаберрационности поверхности S будет $(ABP') = (OP')$, или

$$nx + n'\sqrt{(x-q)^2 + y^2} = n'q,$$

где x и y — текущие координаты точек поверхности S, а q — абсцисса точки P'. Перенеся nx в правую часть и возведя в квадрат, находим уравнение искомой поверхности:

$$\left(n'^2 - n^2\right) x^2 + n'^2 y^2 - 2n'(n' - n)\,qx = 0. \qquad (9.1)$$

Допустим сначала, что $n'^2 - n^2 > 0$. Тогда уравнение (9.1) представляет эллипсоид вращения с полуосями

$$a = \frac{n'}{n' + n}\,q, \quad b = \sqrt{\frac{n' - n}{n' + n}}\,q.$$

Эллипсоид вытянут в направлении оси X. Его эксцентриситет равен

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{n}{n'} < 1.$$

Изображение P' действительное.

Пусть теперь $n'^2 - n^2 < 0$. Тогда (9.1) есть уравнение двуполостного гиперболоида вращения с полуосями

$$a = \frac{n'}{n'+n} q, \quad b = \sqrt{\frac{n-n'}{n'+n}} q$$

и эксцентриситетом

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{n}{n'} > 1.$$

Изображение P' мнимое (рис. 38).

Рассмотрим, наконец, случай, когда $n'^2 - n^2 = 0$. Это может быть либо при $n' - n = 0$, либо при $n' + n = 0$. Первая возможность не представляет интереса, поскольку она соответствует тривиальному случаю, когда обе граничащие среды в оптическом отношении тождественны. Вторая возможность $n' = -n$ может быть реализована при отражении света. В этом случае уравнение (9.1) переходит в

$$y^2 = 4qx \tag{9.2}$$

и представляет параболоид вращения с параметром $p = 2q$ (параболоидальное зеркало). Если $q > 0$ (рис. 34), то фокус P' (на рис. 34 — точка F) мнимый. Если $q < 0$ (рис. 33), то он действительный. Эти случаи уже были рассмотрены в тексте.

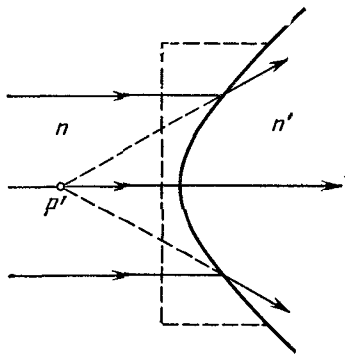

Рис. 38.

Результаты решения этой задачи указывают способ построения *идеальной линзы* для пары сопряженных точек, из которых одна бесконечно удаленная. Рассмотрим сначала линзу, ограниченную поверхностью эллипсоида вращения OB и сферической поверхностью с центром в P' (на рис. 37 эта поверхность изображена пунктиром). Эксцентриситет эллипсоида должен быть равен $1/n$, где n — показатель преломления линзы относительно окружающей среды. Параллельный пучок лучей, падая на поверхность эллипсоида, после преломления на ней превращается в пучок, сходящийся в точке P'. Задняя — сферическая — поверхность линзы не меняет направления лучей, поскольку ее центр находится в точке схождения пучка P'. Таким образом, рассматриваемая линза собирает параллельный пучок лучей строго в одной точке P'. Если точечный источник поместить в P', то после прохождения через линзу пучок лучей станет строго параллельным оптической оси.

Рассмотрим далее линзу, ограниченную плоской поверхностью (на рис. 38 она изображена пунктиром) и гиперболоидом вращения с эксцентриситетом n. Параллельный пучок лучей, падающих на плоскую поверхность линзы, после прохождения через эту поверхность не изменит направления, а после преломления на поверхности гиперболоида превратится в расходящийся пучок лучей, продолжения которых пересекаются строго в одной точке P'.

2. Найти уравнение картезианского овала (см. § 7, пункт 6).

Р е ш е н и е. Пусть $P(q, 0)$ и $P'(q', 0)$ — сопряженные точки, для которых поверхность, получающаяся от вращения картезианского овала относительно оси симметрии PP', анаберрационна. Поместим начало координат в точку пересечения овала с прямой PP'. Тогда по определению анаберрационной поверхности

$$n\sqrt{(x-q)^2+y^2} + n'\sqrt{(x-q')^2+y^2} = n'q' - nq.$$

Освобождаясь от радикалов, получим уравнение картезианского овала:

$$(n^2-n'^2)(x^2+y^2)+4(n^2-n'^2)(n'^2q'-n^2q)(x^2+y^2)x+ \\ +4nn'(nq-n'q')(nq'-n'q)(x^2+y^2)+4(n'^2q'-n^2q)^2x^2+ \\ +8nn'(n'-n)(nq-n'q')qq'x=0. \qquad (9.3)$$

При определенных значениях параметров n, n', q, q' картезианской овал вырождается в поверхности второго порядка. Тогда получаются, в частности, уже разобранные ранее случаи, изображенные на рис. 32, 33, 34, 37 и 38.

§ 10. Преломление на сферической поверхности. Сферические зеркала и тонкие линзы

1. Важнейшие из оптических инструментов или их составные части относятся к так называемым *центрированным оптическим системам*. Они представляют собой оптически однородные преломляющие или отражающие среды, отделенные одна от другой сферическими поверхностями, центры кривизны которых расположены на одной прямой, называемой *главной оптической осью* системы. Обычно, если это не может привести к недоразумениям, прилагательное «главная» мы будем опускать.

2. Начнем с простейшего случая одной сферической преломляющей поверхности, разграничивающей однородные среды с показателями преломления n и n'. Можно предполагать (хотя это и не обязательно), что эта поверхность обладает *симметрией вращения* относительно одной из прямых OC, проходящих через *центр кривизны* сферической поверхности (рис. 39). Такая прямая и будет главной оптической осью. Примем ее за координатную ось X. Начало координат поместим в точке O, в которой главная оптическая ось пересекает сферическую поверхность.

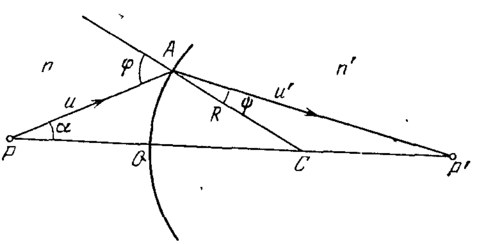

Рис. 39.

Ввиду симметрии вращения достаточно ограничиться рассмотрением хода лучей в координатной плоскости XY. Совместим ее с плоскостью рисунка. Абсциссы и ординаты будем отсчитывать от начала координат O. Если направление отсчета совпадает с направлением распространения света вдоль оптической оси, то соответствующая абсцисса считается *положительной*; в противоположном случае она считается *отрицательной*. То же относится и ко всем другим направленным отрезкам. Например, на рис. 39 абсцисса точки P отрицательна, а точка P' положительна. Ордината считается положительной, если соответствующая точка лежит выше оптической оси, и отрицательной, когда она расположена ниже.