

Освобождаясь от радикалов, получим уравнение картезианского овала:

$$(n^2 - n'^2)(x^2 + y^2) + 4(n^2 - n'^2)(n'^2 q' - n^2 q)(x^2 + y^2)x + \\ + 4nn'(nq - n'q')(nq' - n'q)(x^2 + y^2) + 4(n'^2 q' - n^2 q)^2 x^2 + \\ + 8nn'(n' - n)(nq - n'q')q q' x = 0. \quad (9.3)$$

При определенных значениях параметров n , n' , q , q' картезианский овал вырождается в поверхности второго порядка. Тогда получаются, в частности, уже разобранные ранее случаи, изображенные на рис. 32, 33, 34, 37 и 38.

§ 10. Преломление на сферической поверхности. Сферические зеркала и тонкие линзы

1. Важнейшие из оптических инструментов или их составные части относятся к так называемым *центрированным оптическим системам*. Они представляют собой оптически однородные преломляющие или отражающие среды, отделенные одна от другой сферическими поверхностями, центры кривизны которых расположены на одной прямой, называемой *главной оптической осью* системы. Обычно, если это не может привести к недоразумениям, прилагательное «главная» мы будем опускать.

2. Начнем с простейшего случая одной сферической преломляющей поверхности, разграничивающей однородные среды с показателями преломления n и n' .

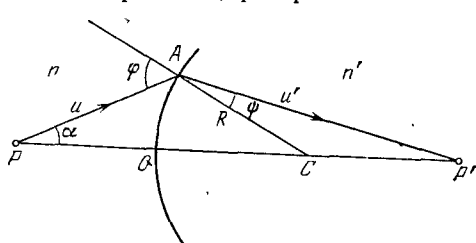


Рис. 39.

Можно предполагать (хотя это и не обязательно), что эта поверхность обладает *симметрией вращения* относительно одной из прямых OC , проходящих через *центр кривизны* сферической поверхности (рис. 39). Такая прямая и будет *главной оптической осью*.

Примем ее за координатную ось X . Начало координат поместим в точке O , в которой главная оптическая ось пересекает сферическую поверхность.

Ввиду симметрии вращения достаточно ограничиться рассмотрением хода лучей в координатной плоскости XU . Совместим ее с плоскостью рисунка. Абсциссы и ординаты будем отсчитывать от начала координат O . Если направление отсчета совпадает с направлением распространения света вдоль оптической оси, то соответствующая абсцисса считается *положительной*; в противоположном случае она считается *отрицательной*. То же относится и ко всем другим направленным отрезкам. Например, на рис. 39 абсцисса точки P отрицательна, а точка P' положительна. Ордината считается положительной, если соответствующая точка лежит выше оптической оси, и отрицательной, когда она расположена ниже.

Допустим, что точечный источник света P находится на оптической оси системы (рис. 39). Произвольный луч PA после преломления на сферической поверхности пойдет по пути AP' . Обозначим длины AP и AP' через u и u' соответственно. Эти длины отсчитываются от точки A и считаются положительными, если направление отсчета совпадает с направлением распространения света, и отрицательными в противоположном случае. Из рисунка видно, что

$$\text{пл. } PAC + \text{пл. } CAP' = \text{пл. } PAP'.$$

Так как $u < 0$, $u' > 0$, то для этих площадей можно написать:

$$\text{пл. } PAC = \frac{1}{2} |PA| \cdot |AC| \sin \varphi = -\frac{1}{2} u R \sin \varphi,$$

$$\text{пл. } CAP' = \frac{1}{2} u' R \sin \psi,$$

$$\text{пл. } PAP' = -\frac{1}{2} u u' \sin(\varphi - \psi) = -\frac{1}{2} u u' (\sin \varphi \cos \psi - \sin \psi \cos \varphi).$$

Здесь R — радиус кривизны преломляющей поверхности. Он отсчитывается от сферической поверхности к ее центру (на рис. 39 радиус R положителен). Таким образом,

$$-u R \sin \varphi + u' R \sin \psi = -u u' (\sin \varphi \cos \psi - \sin \psi \cos \varphi).$$

По закону преломления $\sin \varphi / \sin \psi = n' / n$, а потому

$$-u' R n' + u' R n = u u' (n \cos \varphi - n' \cos \psi).$$

Отсюда

$$\frac{n}{u} - \frac{n'}{u'} = \frac{n \cos \varphi - n' \cos \psi}{R}. \quad (10.1)$$

Положение точки P' зависит от угла наклона α падающего луча к оптической оси. Ограничимся, однако, малыми углами α и допустим, что углы φ и ψ также малы. Лучи, удовлетворяющие таким условиям, называются *параксиальными (приосевыми) лучами*. Для них можно принять

$$\cos \varphi = \cos \psi = 1, \quad AP \approx OP = x, \quad AP' \approx OP' = x'.$$

В этом приближении формула (10.1) переходит в

$$\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'} = \frac{n - n'}{R}. \quad (10.2)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом приближении положение точки P' не зависит от угла α . Следовательно, все параксиальные лучи, выходящие из одной точки оптической оси, после преломления на сферической поверхности пересекутся приблизительно в одной точке, лежащей также на оптической оси. Точка P' будет поэтому *оптическим изображением точки P в параксиальных лучах*. Во всем дальнейшем предполагается, что все лучи, проходящие через центрированные системы, параксиальны.

При выводе предполагалось, что источник света P действительный. Однако все сказанное справедливо и для мнимого источника, т. е. тогда, когда источником служит точка схождения продолжений падающих лучей. В этом легко убедиться, повторив рассуждения применительно к рис. 40.

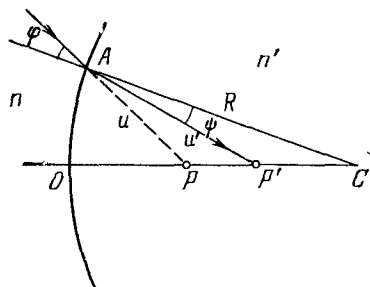


Рис. 40.

Полагая формально $n' = -n$, из (10.2) получаем формулу для сферического зеркала:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{R}. \quad (10.3)$$

3. Рассмотрим теперь случай, когда точечный источник P не лежит на главной оптической оси (рис. 41). Проведем прямую PC , соединяющую точку P с центром кривизны преломляющей поверхности. Такую прямую можно рассматривать как оптическую ось, сведя тем самым разбираемый случай к предыдущему. Для параксиальных лучей $O'P \approx OQ$, $O'P' \approx OQ'$ (здесь Q и Q' — проекции точек P и P' на главную оптическую ось). Абсцисса x' точки P' определится из уравнения (10.2), а ордината y' — из соотношения

$$\frac{y'}{y} = - \left| \frac{CQ'}{CQ} \right| = \frac{x' - R}{x - R},$$

которое следует из подобия треугольников PCQ и $P'CQ'$. В результате находим:

$$x' = \frac{n'Rx}{(n' - n)x + nR}, \quad y' = \frac{nRy}{(n' - n)x + nR}. \quad (10.4)$$

Проведем через точку Q произвольный параксиальный луч QA , образующий с главной оптической осью какой-то угол α . Угол

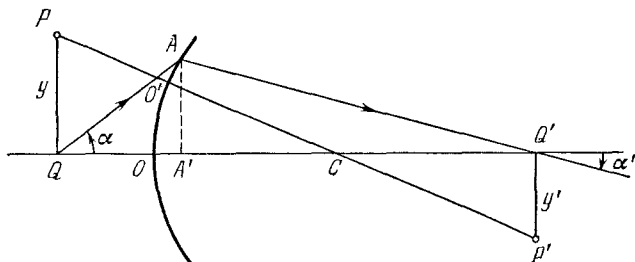


Рис. 41.

наклона преломленного луча AQ' с той же осью обозначим через α' . Отсчет углов производится в направлении от главной оптической

оси к лучу. Если это направление противоположно направлению вращения часовой стрелки, то угол считается положительным; в противоположном случае его следует считать отрицательным (на рис. 41 угол α положительный, угол α' отрицательный). Опустим из точки A перпендикуляр AA' на главную оптическую ось. В приближении параксиальной оптики его длину можно представить в виде $|AA'| = -\alpha x = -x'\alpha'$. Следовательно, $\alpha x = x'\alpha'$. Но из формул (10.4) следует

$$\frac{x'}{x} = \frac{n'y'}{ny}, \quad (10.5)$$

а потому

$$ny\alpha = n'y'\alpha'. \quad (10.6)$$

Таким образом, величина $ny\alpha$ не изменяется при преломлении параксиального луча на сферической поверхности. Эта величина называется *инвариантом Лагранжа — Гельмгольца*, а равенство (10.6) — *теоремой Лагранжа — Гельмгольца*. Теорема, очевидно, справедлива для центрированных систем, состоящих из какого угодно числа преломляющих и отражающих сферических поверхностей.

Формулы (10.4) можно положить в основу геометрической теории любых центрированных систем в параксиальных лучах. Применяя их к первой преломляющей поверхности сложной системы, найдем положение изображения, возникающее от преломления на этой поверхности. Полученное промежуточное изображение играет роль предмета для преломления на второй сферической поверхности. С помощью тех же формул (10.4) можно найти положение второго промежуточного изображения, возникающего от преломления на второй сферической поверхности, и т. д. В конце концов путем последовательного применения формул (10.4) к каждой из преломляющих поверхностей можно найти положение окончательного изображения, даваемого всей системой.

4. В качестве примера рассмотрим тонкую линзу, ограниченную сферическими поверхностями с радиусами кривизны R_1 и R_2 . Относительный показатель преломления линзы обозначим через n , приняв за единицу показатель преломления окружающего пространства. Пусть точечный предмет P находится на главной оптической оси линзы. Толщиной линзы будем пренебрегать и поместим начало координат в ее центре. Обозначим через x абсциссу точки P , через x_1 — абсциссу ее промежуточного изображения P_1 , возникающего от преломления лучей на первой поверхности линзы. Абсциссу x_1 можно найти с помощью формулы (10.2), если в ней сделать замену $n \rightarrow 1$, $n' \rightarrow n$, $x' \rightarrow x_1$, $R \rightarrow R_1$. Это дает

$$\frac{1}{x} - \frac{n}{x_1} = \frac{1-n}{R_1}.$$

Промежуточное изображение P_1 будем рассматривать как предмет при преломлении света на второй сферической поверхности линзы. Изображение точки P , возникающее при таком преломлении, и будет окончательным изображением P' , которое дает линза. Абсцисса x' точки P' найдется из формулы (10.2), если в ней сделать замену $n' \rightarrow 1$, $x \rightarrow x_1$, $R \rightarrow R_2$. Таким путем находим

$$\frac{n}{x_1} - \frac{1}{x'} = \frac{n-1}{R_2}.$$

Складывая это равенство с предыдущим, получим

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = -(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (10.7)$$

Это хорошо известная формула тонкой линзы

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = -\frac{1}{f}. \quad (10.8)$$

Фокусное расстояние f определяется формулой

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (10.9)$$

Эта формула справедлива для всяких тонких линз: двояковыпуклых, двояковогнутых, плоско-выпуклых и т. д. Надо только придерживаться правила знаков, сформулированного в пункте 2 настоящего параграфа. Так, для двояковыпуклой линзы $R_1 > 0$, $R_2 < 0$, а потому фокусное расстояние f положительно. Для двояковогнутой линзы $R_1 < 0$, $R_2 > 0$, и фокусное расстояние f отрицательно. (В обоих случаях предполагается, что $n > 1$.)

§ 11. Общие свойства центрированных оптических систем

1. Свойства центрированных оптических систем в параксиальных лучах были систематически исследованы Гауссом (1777—1855) в 1841 г. Поэтому оптику параксиальных лучей часто называют *гауссовой оптикой*. При изложении относящихся сюда вопросов мы применим *аналитический метод*. Он менее нагляден, чем геометрический метод. Зато аналитический метод отличается большей простотой и систематичностью.

В случае одной преломляющей поверхности координаты x , y точки-предмета связаны с координатами x' , y' точки-изображения формулами (10.4). В этих формулах используется одна и та же координатная система в пространствах предметов и изображений. Выберем теперь в этих пространствах *разные системы координат*, получающиеся из исходной системы параллельным переносом вдоль главной оптической оси. Начала координат этих систем лежат на главной оптической оси, но могут и не совпадать друг с другом.