лении, в зависимости от того, уменьшаются или увеличиваются поперечные размеры светового пучка в этом направлении. Искажения не получится, если держать призму под углом наименьшего отклонения, но в этом случае не будет и увеличения. Комбинацией двух призм, преломляющие ребра которых взаимно перпендикулярны, можно произвольно увеличивать или уменьшать поперечное сечение светового пучка и притом одинаково по всем направлениям. Такая комбинация действует как обыкновенная зрительная труба. Вращая каждую из призм вокруг своего преломляющего ребра, можно получить произвольное увеличение. Недостатками такого оптического прибора являются большие геометрические и хроматические аберрации, вносимые им. Практического значения он не имеет.

§ 12. Сложение центрированных систем. Толстые линзы

1. Пусть две центрированные системы соединены вместе таким образом, что их оптические оси совпадают. Если известны параметры каждой системы, а также их взаимное расположение, то геометрическим построением или аналитическим расчетом можно определить положение всех кардинальных точек сложной оптической системы, состоящей из этих двух систем.

Обозначим фокусные расстояния первой системы через f_1 и f_1', а второй системы — через f_2 и f_2'. Пусть Δ означает расстояние передней фокальной точки F_2 второй системы от задней фокальной точки F_1' первой системы (рис. 47). Это расстояние называется

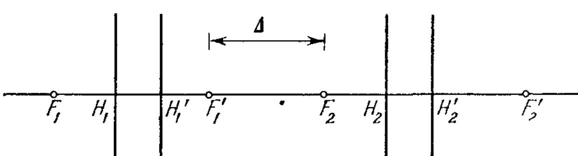

Рис. 47.

оптическим интервалом двух систем и в соответствии с принятым правилом знаков считается положительным, если падающий свет идет в направлении от фокуса F_1' к фокусу F_2, в противоположном случае оптический интервал считается отрицательным. Заданием оптического интервала полностью определяется взаимное расположение складываемых систем. С целью упрощения вычислений начала координат для каждой из складываемых систем поместим в ее фокальные точки. Фокус F_1 примем за начало координат в пространстве предметов всей сложной системы, а фокус F_2' — за начало координат в пространстве изображений той же системы. Пусть x, y — координаты предмета, а x_1, y_1 — его изображения, даваемого первой из складываемых систем. Тогда

$$xx_1 = f_1 f_1', \quad \frac{y_1}{y} = \frac{f_1}{x}.$$

Примем это промежуточное изображение за «предмет» для второй из складываемых систем. Координаты этого предмета в координатной системе с началом в точке F_2 будут $x_2 = x_1 - \Delta$, $y_2 = y_1$. Если x', y' — координаты изображения, даваемого второй системой (а следовательно, и всей сложной системой) относительно начала F_2', то

$$x_2 x' = f_2 f_2', \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{x'}{f_2'}.$$

Исключая промежуточные координаты x_1, y_1, x_2, y_2, получим

$$x' = \frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1' - \Delta \cdot x} x, \quad y' = \frac{f_1 f_2}{f_1 f_1' - \Delta \cdot x} y. \tag{12.1}$$

Это — формулы коллинеарного соответствия с коэффициентами

$$a = f_2 f_2', \quad b = 0, \quad c = -\Delta, \quad d = f_1 f_1', \quad e = f_1 f_2.$$

Из них по формулам (11.6) и (11.9) находим координаты фокальных точек и фокусные расстояния сложной системы:

$$x_F = \frac{f_1 f_1'}{\Delta}, \qquad x'_{F'} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}, \tag{12.2}$$

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}, \quad f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \tag{12.3}$$

Координаты главных точек определяются выражениями

$$\begin{aligned} x_H &= x_F + f = f_1 \frac{f_1' - f_2}{\Delta}, \\ x'_{H'} &= x'_{F'} + f' = f_2' \frac{f_1' - f_2}{\Delta}. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Следовательно,

$$\frac{x_H}{x'_{H'}} = \frac{f_1}{f_2'}. \tag{12.5}$$

Если оптический интервал Δ обращается в нуль, то фокусные расстояния f и f' обращаются в бесконечность, т. е. система будет *телескопической*. (Такой случай осуществляется, например, в зрительной трубе.) В этом случае уравнения (12.1) переходят в (11.23), причем

$$A = \frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}, \quad B = \frac{f_2}{f_1'}.$$

Угловое увеличение сложной системы будет

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{B}{A} = \frac{f_1}{f_2'}. \tag{12.6}$$

В частности, при $n = n'$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1}{f_2}. \tag{12.7}$$

Это согласуется с результатом, полученным выше для кеплеровой трубы.

Если обе складываемые системы телескопические, то составная система также телескопическая, причем ее угловое увеличение равно произведению угловых увеличений складываемых систем. Наконец, *соединение телескопической системы и системы с конечными фокусными расстояниями образует систему с конечными фокусными расстояниями при всякой последовательности расположения обеих систем.*

2. Величина, обратная главному фокусному расстоянию f' пространства изображений, взятая с противоположным знаком, т. е. $-1/f'$, называется *оптической силой системы*. Оптическая сила измеряется *диоптриями*. Диоптрия есть оптическая сила такой системы, фокусное расстояние $|f'|$ которой равно одному метру. Для собирательных тонких линз оптическая сила *положительна*, для рассеивающих *отрицательна*.

Определим оптическую силу сложной системы, зная оптические силы составляющих систем и их взаимное расположение. Будем предполагать, что показатели преломления всех пространств предметов и изображений одинаковы. Обозначим через l_{12} расстояние $H_1'H_2$ передней главной плоскости H_2 второй системы от задней главной плоскости H_1' первой системы. Оптический интервал между рассматриваемыми системами будет

$$\Delta = F_1'F_2 = F_1'H_1' + H_1'H_2 + H_2F_2 = f_1' + l_{12} - f_2 = f_1' + l_{12} + f_2'.$$

Подставляя это значение в формулу (12.3), получим

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} + \frac{l_{12}}{f_1'f_2'}. \tag{12.8}$$

В частности, когда задняя главная плоскость первой системы совпадает с передней главной плоскостью второй системы, то

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}, \tag{12.9}$$

т. е. *оптическая сила сложной системы равна сумме оптических сил составляющих систем*. Это имеет место, например, для двух тонких линз, прижатых вплотную одна к другой.

Применим полученные результаты к системе двух центрированных тонких линз: собирательной и рассеивающей, поставленных друг за другом. Пусть фокусные расстояния линз по абсолютной величине одинаковы: $f_1 = -f_2$, а потому $f_1' = -f_2'$. Оптический интервал между линзами $\Delta = f_1' + l_{12} + f_2' = l_{12}$, т. е. положителен ($l_{12} > 0$). Из формулы (12.6) получаем

$$f = -f' = -\frac{f_1'f_2'}{l_{12}} = -\frac{f_1f_2}{l_{12}} = \frac{f_1^2}{l_{12}} > 0,$$

Далее, по формулам (12.2) и (12.4) находим $x_H = x'_{H'} = 0$, т. е. главные плоскости H и H' системы проходят соответственно через фокусы F_1 и F'_1 и находятся на расстоянии l_{12} друг от друга. Абсцисса главного фокуса F' системы:

$$x'_{F'} = -\frac{f_2 f'_2}{l_{12}} = \frac{f_1^2}{l_{12}},$$

абсцисса линзы L_2:

$$x'_{L_2} = f'_2 = -f'_1 = f_1.$$

Таким образом,

$$x'_{F'} - x'_{L_2} = \frac{f_1^2}{l_{12}} - f_1.$$

Для того чтобы система линз собирала лучи, параллельные главной оптической оси, в действительном фокусе, т. е. была собирающей, необходимо, чтобы эта разность была положительна. Если первая линза рассеивающая, то указанное условие соблюдается всегда, так как в этом случае $f_1 < 0$. Если же первая линза собирательная, то это условие сводится к $l_{12} < f_1$. Эти результаты легче получить непосредственным геометрическим построением, что и рекомендуется сделать читателю.

Системы линз, аналогичные рассмотренной, применяются в современных ускорителях для фокусировки заряженных частиц. На них основан принцип так называемой *жесткой фокусировки*.

3. Каждая центрированная система может рассматриваться как сложная система, состоящая из нескольких подсистем. В качестве подсистем можно взять сферические границы раздела сред, на которых световые лучи испытывают преломление или отражение. Для сферической границы раздела коллинеарное соответствие выражается формулами (10.4). Из них и из формул (11.8) находим прежде всего: $x_H = x'_{H'} = 0$, т. е. обе главные плоскости совпадают между собой и проходят через точку пересечения рассматриваемой преломляющей поверхности с главной оптической осью системы. Для фокусных расстояний f и f' подсистем формулы (10.4) и (11.9) дают

$$f = \frac{Rn}{n'-n}, \quad f' = -\frac{Rn'}{n'-n}. \tag{12.10}$$

Используя эти формулы, а также формулы (12.2), (12.3) и (12.4), можно рассчитать параметры любой центрированной системы.

4. В качестве примера проведем расчет параметров *толстой линзы*. Пусть R_1 и R_2 означают радиусы кривизны преломляющих сферических поверхностей линзы, n_1, n_2, n_3 — показатели преломления первой среды, вещества линзы и второй среды (рис. 48), f_1 и f'_1 — фокусные расстояния при преломлении на передней поверхности линзы, f_2 и f'_2 — на задней. В таком случае

$$f_1 = \frac{n_1 R_1}{n_2 - n_1}, \quad f'_1 = -\frac{n_2 R_1}{n_2 - n_1},$$
$$f_2 = \frac{n_2 R_2}{n_3 - n_2}, \quad f'_2 = -\frac{n_3 R_2}{n_3 - n_2}.$$

Будем рассматривать преломляющие поверхности линзы как центрированные подсистемы, а саму линзу — как сложную систему.

Если d — толщина линзы, то $\Delta = f_1' + d - f_2$, или после подстановки значений f_1' и f_2'

$$\Delta = \frac{D}{(n_2 - n_1)(n_3 - n_2)}, \tag{12.11}$$

где введено обозначение

$$D = d(n_1 - n_2)(n_2 - n_3) + n_2[R_1(n_2 - n_3) + R_2(n_1 - n_2)]. \tag{12.12}$$

Для фокусных расстояний f и f' линзы из формул (12.3) получаем

$$f = -n_1 n_2 \frac{R_1 R_2}{D}, \quad f' = n_2 n_3 \frac{R_1 R_2}{D}. \tag{12.13}$$

Координаты фокальных точек линзы F и F' можно вычислить по формулам (12.2), которые дают

$$x_F = -n_1 n_2 \frac{n_2 - n_3}{n_1 - n_2} \frac{R_1^2}{D}, \quad x'_{F'} = n_2 n_3 \frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3} \frac{R_2^2}{D}. \tag{12.14}$$

При этом за начало координат в пространстве предметов линзы принят фокус F_1, а в пространстве изображений — фокус F_2'.

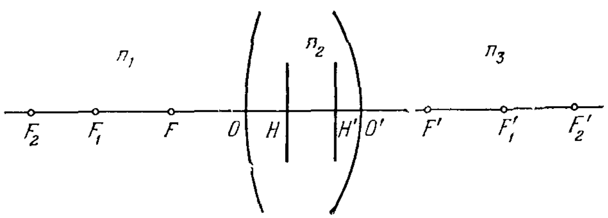

Рис. 48.

Найдем расстояния h и h' главных плоскостей линзы от точек O и O'. По определению

$$h = OH = OF_1 + F_1F + FH = -f_1 + x_F + f,$$

$$h' = O'H' = O'F_2' + F_2'F' + F'H' = -f_2' + x'_{F'} + f'.$$

Отсюда

$$h = n_1(n_2 - n_3)\frac{R_1 d}{D}, \quad h' = -n_3(n_1 - n_2)\frac{R_2 d}{D}. \tag{12.15}$$

Обычно показатели преломления крайних сред n_1 и n_3 одинаковы. Полагая в этом случае $n_1 = n_3 = 1$, $n_2 = n$, получим

$$f = -f' = -n\frac{R_1 R_2}{D}, \tag{12.16}$$

$$h = (n-1)\frac{R_1 d}{D}, \quad h' = (n-1)\frac{R_2 d}{D}, \tag{12.17}$$

$$D = (n-1)[n(R_1 - R_2) - d(n-1)], \tag{12.18}$$

$$e = HH' = d - h + h'; \tag{12.19}$$

через e здесь обозначено расстояние главной плоскости H' от главной плоскости H (см. рис. 48).

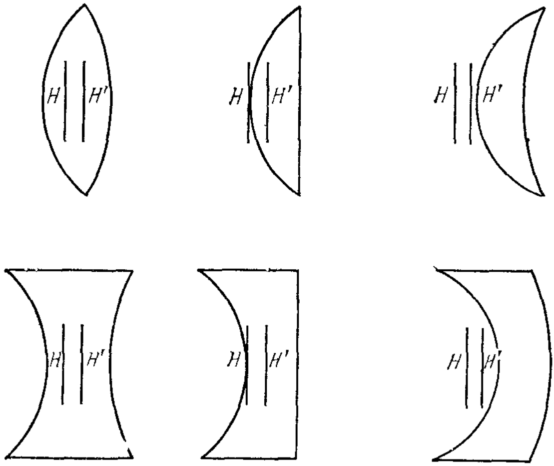

Рис. 49.

Если линза не очень толстая, а разность $R_1 - R_2$ не слишком мала, то в выражении (12.18) слагаемым $d(n-1)$ можно пренебречь. В этом приближении

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \tag{12.20}$$

$$h = \frac{R_1}{n(R_1 - R_2)} d, \quad h' = \frac{R_2}{n(R_1 - R_2)} d, \tag{12.21}$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{R_1}{R_2}, \tag{12.22}$$

$$e = \frac{n-1}{n} d. \tag{12.23}$$

На рис. 49 изображены типичные линзы с указанием положений их главных плоскостей ($n = 1{,}5$).

ЗАДАЧИ

1. Для определения углового увеличения зрительной трубы *методом Рамсдена* (1735—1800) трубу устанавливают на бесконечность. Вывернув объектив, устанавливают на его место предмет определенной величины (экран с вырезом). Окуляр трубы дает действительное изображение взятого предмета. Пусть L — величина предмета, а l — величина его изображения. Показать, что угловое увеличение зрительной трубы равно L/l.

Решение. Примем за начала координатных систем фокальные точки окуляра. Тогда в формуле (11.17) следует положить $X = f_1'$, $f = f_2$. Это дает $L/l = f_1'/f_2$, т. е. увеличение трубы (см. § 11, пункт 10).

2. Для определения фокусного расстояния собирательной линзы Бессель (1784—1846) предложил следующий метод.

С помощью линзы на экране получается действительное изображение предмета. Пусть A — расстояние от предмета до его изображения. Тогда $A = \xi' + e - \xi$. Исключая с помощью этого соотношения ξ' из (11.14), получим

$$\xi^2 + (A-e)\xi + (A-e)f = 0. \tag{12.24}$$

Если

$$A - e > 4f, \tag{12.25}$$

то уравнение (12.24) имеет два вещественных корня ξ_1 и ξ_2. В этом случае существуют два положения линзы, при которых на экране получаются действительные изображения предмета (при неизменном расстоянии между предметом и экраном). Чтобы перейти от одного изображения к другому, надо сместить линзу на расстояние $a = \xi_1 - \xi_2 = \sqrt{(A-e)^2 - 4f(A-e)}$, откуда

$$f = -f' = \frac{(A-e)^2 - a^2}{4(A-e)}. \tag{12.26}$$

Величины A и a можно измерить. Величина же e — расстояние между главными плоскостями — неизвестна. Для ее определения можно взять другое расстояние A_1 между предметом и экраном и измерить соответствующее смещение линзы a_1. Получится выражение вида (12.26), в котором A и a заменены на A_1 и a_1. Сравнивая эти два выражения, можно вычислить e. Для упрощения расчета можно пренебречь e^2 по сравнению с A^2. Это дает

$$f = -f' = \frac{A^2 - a^2}{4A} - \frac{A^2 + a^2}{4A^2} e. \tag{12.27}$$

§ 13. Ограничение лучей при помощи диафрагм

1. Четкие изображения, как правило, получаются только *в параксиальных лучах*. Непараксиальные лучи на практике устраняются *диафрагмами*. Роль диафрагм могут играть также оправы линз или зеркал.

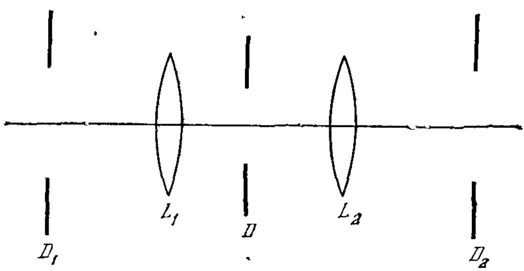

Рис. 50.

Пусть D (рис. 50) — какая-либо диафрагма, а D_1 — ее изображение в параксиальных лучах впереди стоящими линзами. Если диафрагму D заменить диафрагмой D_1, то D_1 будет так же ограничивать параксиальные лучи, как и D. В самом деле, в приближении параксиальной оптики всякий луч, проходящий через край отвер-