

Каждому фотографу известно, что при недостатке глубины изображения надо либо уменьшить апертурную диафрагму, либо удалиться от фотографируемого объекта.

6. Положение входного зрачка по отношению к плоскости установки определяет *перспективу*, в которой виден предмет. Если входной зрачок расположен за предметом в направлении лучей, то при проецировании предмета из центра входного зрачка на плоскость установки ближние к оптической системе части предмета получают большее увеличение, чем дальние. При таком расположении близкие предметы на изображении будут получаться большими, чем равные им более далекие предметы (*нормальная* или *энтоцентрическая перспектива*). Напротив, если входной зрачок лежит перед предметом, то на изображении близкие предметы получатся меньшими, чем равные им более далекие предметы (*гиперцентрическая перспектива*). Наконец, в промежуточном случае, когда входной зрачок удален в бесконечность, величина изображения не зависит от расстояния предмета до оптической системы (*телецентрическая перспектива*). Изменение расстояния до предмета сказывается в этом случае *не на величине изображения, а на его резкости*. Поэтому такая перспектива применяется в измерительных микроскопах, так как результат измерения при этом не зависит от точной установки измеряемого предмета. Чтобы ее осуществить, достаточно поместить апертурную диафрагму в задний фокус линзы L_1 (рис. 50).

В зрительных трубах, когда предмет практически находится в бесконечности, необходимо, чтобы величина изображения, проецирующегося на шкалу с делениями, не зависела от точной установки шкалы. Этого можно достигнуть, поместив апертурную диафрагму в передний фокус линзы L_2 (рис. 50). Тогда выходной зрачок удалится в бесконечность, главный луч будет параллелен оптической оси и встретит плоскость шкалы на одном и том же удалении от оптической оси. Следовательно, величина изображения на шкале не будет зависеть от ее положения.

§ 14. Астигматические пучки лучей. Каустика

1. При наличии непараксиальных лучей, а также при отсутствии осевой симметрии оптической системы (примером может служить цилиндрическая линза) сферическая волна, исходящая из светящейся точки, после прохождения через оптическую систему перестает быть сферической. В результате светящаяся точка уже не будет изображаться оптической системой в виде точки. Связанные с этим искажения оптических изображений называются *геометрическими* или *лучевыми aberrациями оптических систем*. Помимо лучевых существуют еще *хроматическая aberrация*, т. е. появление окрашенных каемок в изображении, когда оно получается в белом свете, а также *волновые* или *дифракционные aberrации*.

ции, обусловленные дифракцией света. Учет последних необходим при рассмотрении разрешающей способности оптических и спектральных приборов, а также других тонких вопросов, связанных с получением оптических изображений. Однако сначала мы отвлечемся от хроматической и дифракционных aberrаций, предполагая, что световые пучки, формирующие изображение, — *монохроматические* и к ним применима *геометрическая оптика*.

2. Напомним сначала необходимые сведения из дифференциальной геометрии. Пусть S — какая-то гладкая поверхность, а O — произвольная точка на ней (рис. 53а). Нормаль к поверхности S в точке O обозначим через N . Проведем через N плоскость Π , пересекающую поверхность S вдоль некоторой кривой L . Если плоскость Π вращать вокруг нормали N в пределах 180° , то кривизна кривой L , вообще говоря, будет изменяться, достигая в каком-то положении L_1 максимума, а в другом положении L_2 — минимума. В дифференциальной геометрии доказывается, что нормальные сечения поверхности S максимальной и минимальной кривизны взаимно перпендикулярны. Эти сечения называются *главными нормальными сечениями поверхности S* , проходящими через точку O . Линии, по которым они пересекают поверхность S в окрестности точки O , называются *линиями кривизны*, а радиусы кривизны последних R_1 и R_2 — *главными радиусами кривизны поверхности S* . Если знаки R_1 и R_2 одинаковы, то линии кривизны обращены вогнутостями в одну и ту же сторону; если разные, то в противоположные стороны. Если в точке O $R_1 = R_2$, то эта точка называется *точкой закругления поверхности*.

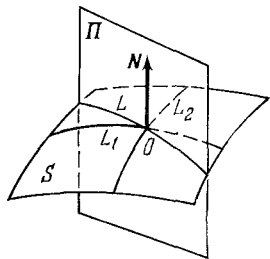


Рис 53а.

3. Пусть теперь поверхность S является волновым фронтом. Возьмем на ней какую-то элементарную площадку dS . Бесконечно узкий пучок лучей волнового фронта, проходящий через эту площадку, называется *астигматическим*, если главные радиусы кривизны R_1 и R_2 не совпадают между собой. Луч, проходящий через центр площадки dS , называется *главным*¹⁾.

Вообще говоря, две нормали к поверхности S не пересекаются в одной точке. Однако нормали, восстановленные в бесконечно близких точках, лежащих на одной и той же линии кривизны, пересекаются в одной точке (если пренебречь величинами высших порядков малости). Заметив это, возьмем в качестве элемента dS бесконечно малую площадку $ABDC$, имеющую форму криволиней-

¹⁾ При отсутствии симметрии площадки понятие ее центра, строго говоря, теряет смысл. Однако и в этом случае можно указать какую-то, хотя и не совсем четко определенную, точку в середине площадки, которую можно рассматривать как центр последней.

ного четырехугольника, сторонами которого служат линии кривизны поверхности S (рис. 536). Лучи, лежащие в главных сечениях элемента волнового фронта dS , проходящих через его центр, сходятся в различных точках F_1 и F_2 , называемых *фокальными точками*; расстояние F_1F_2 называется *астигматической разностью элементарного пучка*. Лучи, проходящие через противоположные стороны AB и CD , пересекутся в точках M_1 и N_1 соответственно. Лучи, исходящие из всякой промежуточной линии кривизны между сторонами AB и CD , сойдутся в какой-то промежуточной точке бесконечно малого отрезка M_1N_1 , проходящего через фокальную точку F_1 . Аналогично, лучи, исходящие из линий кривизны

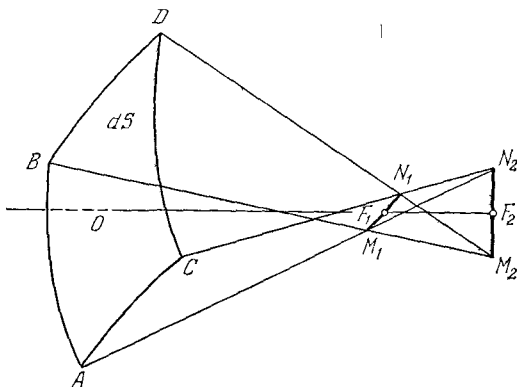


Рис. 536.

между сторонами BD и AC , пересекутся в какой-то точке другого бесконечно малого отрезка M_2N_2 , проходящего через вторую фокальную точку F_2 .

Отрезки M_1N_1 и M_2N_2 называются *фокальными отрезками* элементарного астигматического пучка лучей, исходящих от элемента волнового фронта $ABCD$. Если элементарный астигматический пучок лучей исходит из светящейся точки, то фокальные отрезки M_1N_1 и M_2N_2 принято называть *изображениями* этой точки, даваемыми *астигматическим пучком*, хотя точечного изображения в этом случае и не существует. Если элемент $ABCD$ обладает симметрией прямоугольника, то отрезки M_1N_1 и M_2N_2 будут перпендикулярны между собой, а также к главному лучу пучка. В общем случае это может быть и не так. При бесконечном уменьшении поперечных размеров пучка лучей отрезки M_1N_1 и M_2N_2 стягиваются в фокальные точки F_1 и F_2 .

Таким образом, в отличие от гомоцентрического пучка, бесконечно узкий астигматический пучок дает не одно, а *два точечных изображения* F_1 и F_2 светящейся точки. Конечный пучок лучей

можно разложить на элементарные астигматические пучки, каждому из которых соответствует пара фокальных точек. Геометрическое место этих точек есть двухлиственная поверхность, называемая *каустической поверхностью*, или *каустикой*.

ЗАДАЧА

Точечный источник света P помещен в прозрачной однородной среде, ограниченной плоскостью. Световые лучи, исходящие из P , испытывают преломление на этой плоскости. Найти для них каустическую поверхность.

Решение. Каустика преломленных лучей состоит из двух листов. Один из них есть геометрическое место фокальных точек *меридиональных лучей*, т. е. лучей, лежащих в плоскости падения главного луча элементарного астигматического пучка. Другой — геометрическое место фокальных точек *экваториальных лучей*, т. е. лучей, лежащих в перпендикулярной плоскости, проходящей через главный луч элементарного пучка.

Пусть n — показатель преломления среды, в которой помещен источник P . Показатель преломления пространства, с которым граничит эта среда, примем за единицу. Введем прямоугольную систему координат с началом O , расположенным на границе среды. За ось Z примем нормаль к поверхности среды, направив эту ось в сторону точки P (рис. 54). Ввиду осевой симметрии достаточно найти сечение каустической поверхности плоскостью, проходящей через ось Z . Прямую, вдоль которой эта плоскость пересекает границу среды, примем за ось X .

Найдем сначала каустикой для меридиональных преломленных лучей, Уравнение преломленного луча AB будет

$$z = -\operatorname{ctg} \varphi (x - h \operatorname{tg} \psi),$$

где h — расстояние от точки P до границы среды, ψ — угол падения из среды на эту границу, φ — угол преломления. Для бесконечно близкого луча $PA'B'$ углы φ и ψ получают приращения $d\varphi$ и $d\psi$. Приращение координаты z при одном и том же значении абсциссы x при этом будет равно

$$dz = \frac{x - h \operatorname{tg} \psi}{\sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{h \operatorname{ctg} \varphi}{\cos^3 \psi} d\psi,$$

или с использованием закона преломления $\sin \varphi = n \sin \psi$:

$$dz = \frac{x - h \operatorname{tg} \psi}{\sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{h \operatorname{ctg} \varphi \cos \varphi}{n \cos^3 \psi} d\varphi.$$

Координаты x_m и z_m точки P_m , в которой пересекаются продолжения бесконечно близких меридиональных лучей AB и $A'B'$, найдутся отсюда, если приращение dz приравнять нулю. Это дает

$$x_m = h \left(\operatorname{tg} \psi - \frac{\cos^3 \varphi \sin \varphi}{n \cos^3 \psi} \right), \quad z_m = h \frac{\cos^3 \varphi}{n \cos^3 \psi}. \quad (14.1)$$

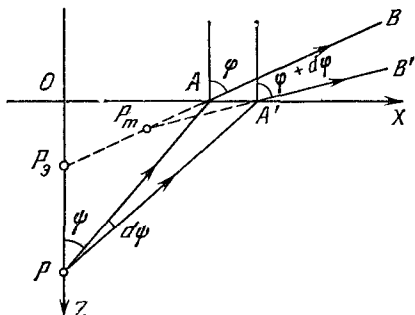


Рис. 54

Это и есть *уравнение каустики для меридиональных лучей*. Используя его, нетрудно вывести формулу

$$l_m = l \frac{\cos^2 \varphi}{n \cos^2 \psi}, \quad (14.2)$$

где l — расстояние от предмета P до точки выхода A преломленного луча, а l_m — расстояние меридионального изображения P_m до той же точки.

Еще проще находится *каустика для экваториальных лучей*. Пусть PAB — один из лучей, исходящих из точки P (рис. 54). Если этот луч вращать вокруг перпендикуляра OP к преломляющей поверхности, то получится конус падающих и соответствующий ему конус преломленных лучей. Вершиной второго конуса будет точка P_0 , в которой продолжение преломленного луча AB пересекает перпендикуляр PO . Бесконечно малые пучки падающих и преломленных лучей, лежащих на поверхностях указанных конусов, для которых луч PAB является главным, будут, очевидно, расположены в плоскостях, перпендикулярных к плоскости падения луча PAB . Значит, лучи этих пучков будут *экваториальными*, а точка P_0 — изображением в этих лучах. Таким образом, все фокальные точки экваториальных лучей расположатся на перпендикуляре PO , т. е. каустика таких лучей выродится в отрезок этого перпендикуляра. Расстояние l_0 точки P_0 от точки выхода преломленного луча AB будет $P_0A = l \sin \psi / \sin \varphi$, т. е.

$$l_0 = \frac{l}{n}. \quad (14.3)$$

Результаты вычислений представлены на рис. 55 для $n = 1,5$ (стекло). Каустика экваториальных лучей представляется вертикальным отрезком OP' , длина которого равна h/n . Сечение каустики меридиональных лучей плоскостью

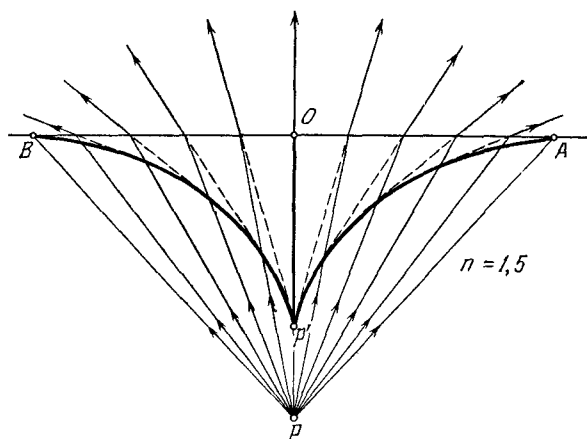


Рис. 55.

рисунка есть кривая $BP'A$, для которой P' является *точкой возврата*. Продолжение преломленных лучей, изображенные на рисунке пунктирными прямыми, касаются кривой $BP'A$. Таким образом, если начертить еще сечение волнового фронта вышедших преломленных лучей, то для этого сечения кривая $BP'A$ будет *эволютой*. Сама каустика меридиональных лучей получится от вращения этой эволюты вокруг вертикальной прямой PO . Для параксиальных пучков

фокальные точки меридиональных и экваториальных лучей совпадают и получаются в P' . Крайние точки A и B каустики меридиональных лучей получаются от пересечения предельных лучей полного отражения PA и PB с границей среды. Предлагаем читателю начертить каустику меридиональных и экваториальных лучей для случая $n < 1$.

§ 15. Геометрические aberrации центрированных систем

1. Геометрические aberrации в центрированных системах, т. е. отступления от параксиальной оптики, вызываются *непараксиальными пучками лучей*, участвующими в образовании оптических изображений. Дадим классификацию таких aberrаций.

Произвольный луч в пространстве предметов можно задать, указав прямоугольные координаты y, z и η, ζ точек его пересечения с предметной плоскостью (т. е. плоскостью, проходящей через изображаемую точку P перпендикулярно к главной оптической оси) и плоскостью входного зрачка. После прохождения через оптическую систему луч пересечет плоскость параксиального изображения в точке с координатами y', z' . Координаты самого параксиального изображения (называемого в дальнейшем также *параксиальным фокусом*) обозначим через y'_0, z'_0 . Тогда разности $\Delta y' = y' - y'_0, \Delta z' = z' - z'_0$ и можно принять за меру отступлений оптики реальной системы от предельного случая параксиальной оптики.

Координаты y', z' будут функциями аргументов y, z, η, ζ :

$$y' = f_1(y, z, \eta, \zeta), \quad z' = f_2(y, z, \eta, \zeta).$$

Для классификации геометрических aberrаций разложим эти функции в степенные ряды по своим аргументам. Линейные члены этих разложений, пропорциональные y и z , соответствуют параксиальной оптике. Линейные члены по η и ζ не войдут, так как в параксиальном приближении y' и z' не зависят от наклона лучей, выходящих из точки P . Не могут войти и члены четных степеней ввиду осевой симметрии оптической системы. Из всего этого следует, что разложения в степенные ряды отклонений $\Delta y' = y' - y'_0$ и $\Delta z' = z' - z'_0$ могут содержать только члены *нечетных степеней* по y, z, η, ζ , причем эти разложения могут начаться с членов, степень которых *не ниже трех*. Считая аргументы y, z, η, ζ малыми, сохраним в разложениях только члены третьей степени. Aberrации, вычисленные в этом приближении, называются *первичными*, или *aberrациями третьего порядка*. Члены пятой степени вызывают aberrации *пятого порядка*, и т. д. Мы ограничимся только aberrациями третьего порядка.

Переходя к векторным обозначениям, введем три вектора, перпендикулярных к главной оптической оси системы:

$$r = yj + zk, \quad r' = y'j + z'k, \quad \sigma = \eta j + \zeta k,$$