

фокальные точки меридиональных и экваториальных лучей совпадают и получаются в P' . Крайние точки A и B каустики меридиональных лучей получаются от пересечения предельных лучей полного отражения PA и PB с границей среды. Предлагаем читателю начертить каустику меридиональных и экваториальных лучей для случая $n < 1$.

§ 15. Геометрические aberrации центрированных систем

1. Геометрические aberrации в центрированных системах, т. е. отступления от параксиальной оптики, вызываются *непараксиальными пучками лучей*, участвующими в образовании оптических изображений. Дадим классификацию таких aberrаций.

Произвольный луч в пространстве предметов можно задать, указав прямоугольные координаты y, z и η, ζ точек его пересечения с предметной плоскостью (т. е. плоскостью, проходящей через изображаемую точку P перпендикулярно к главной оптической оси) и плоскостью входного зрачка. После прохождения через оптическую систему луч пересечет плоскость параксиального изображения в точке с координатами y', z' . Координаты самого параксиального изображения (называемого в дальнейшем также *параксиальным фокусом*) обозначим через y'_0, z'_0 . Тогда разности $\Delta y' = y' - y'_0$, $\Delta z' = z' - z'_0$ и можно принять за меру отступлений оптики реальной системы от предельного случая параксиальной оптики.

Координаты y', z' будут функциями аргументов y, z, η, ζ :

$$y' = f_1(y, z, \eta, \zeta), \quad z' = f_2(y, z, \eta, \zeta).$$

Для классификации геометрических aberrаций разложим эти функции в степенные ряды по своим аргументам. Линейные члены этих разложений, пропорциональные y и z , соответствуют параксиальной оптике. Линейные члены по η и ζ не войдут, так как в параксиальном приближении y' и z' не зависят от наклона лучей, выходящих из точки P . Не могут войти и члены четных степеней ввиду осевой симметрии оптической системы. Из всего этого следует, что разложения в степенные ряды отклонений $\Delta y' = y' - y'_0$ и $\Delta z' = z' - z'_0$ могут содержать только члены *нечетных степеней* по y, z, η, ζ , причем эти разложения могут начаться с членов, степень которых *не ниже трех*. Считая аргументы y, z, η, ζ малыми, сохраним в разложениях только члены третьей степени. Aberrации, вычисленные в этом приближении, называются *первичными*, или *aberrациями третьего порядка*. Члены пятой степени вызывают aberrации *пятого порядка*, и т. д. Мы ограничимся только aberrациями третьего порядка.

Переходя к векторным обозначениям, введем три вектора, перпендикулярных к главной оптической оси системы:

$$r = yj + zk, \quad r' = y'j + z'k, \quad \sigma = \eta j + \zeta k,$$

где \mathbf{j} и \mathbf{k} — единичные векторы, указывающие направления координатных осей Y и Z . Вектор \mathbf{r} определяет положение точки-предмета P в предметной плоскости, вектор \mathbf{r}' — точки пересечения выходящего луча с парааксиальной плоскостью изображения, вектор $\boldsymbol{\sigma}$ — точки пересечения падающего луча с плоскостью входного зрачка. Вектор $\Delta\mathbf{r}' = \Delta y'\mathbf{j} + \Delta z'\mathbf{k}$ можно разложить по векторам $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{r} . Ввиду осевой симметрии коэффициенты этих разложений могут зависеть только от «инвариантов вращения» σ^2 , $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})$ и r^2 . Поэтому с точностью до членов третьей степени включительно

$$\Delta\mathbf{r}' = [A\sigma^2 + B(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}) + Cr^2]\boldsymbol{\sigma} + [D\sigma^2 + E(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}) + Fr^2]\mathbf{r}, \quad (15.1)$$

где A, B, C, D, E, F — постоянные коэффициенты, зависящие от устройства оптической системы и от положения предметной плоскости.

В дальнейшем будем понимать под σ радиус входного зрачка, выделяя тем самым падающие лучи (или их продолжения), проходящие через точки окружности входного зрачка. Тогда вектор $\Delta\mathbf{r}'$ окажется разложенным по степеням радиуса входного зрачка. Назовем *абберационной кривой* кривую, по которой плоскость парааксиального изображения пересекает пучок лучей, проведенных из точки-объекта P через окружность входного зрачка. Изображением точки P в парааксиальной плоскости изображения будет не точка, а какое-то пятнышко, ограниченное абберационной кривой. Для наглядности можно представить, что в качестве апертурной взята ирисовая диафрагма, радиус которой можно непрерывно менять. Тогда разложение (15.1) определит, как в рассматриваемом приближении будет меняться абберационная кривая при изменении радиуса этой диафрагмы. Отступления от парааксиальной оптики определяются, конечно, суммой (15.1) в целом, а не отдельными слагаемыми, из которых она состоит. Однако при классификации аббераций имеет смысл рассматривать каждое слагаемое в отдельности и рассуждать так, как если бы остальных слагаемых не было совсем. Тогда, в зависимости от степени σ , все абберации третьего порядка можно разбить на четыре группы, которые мы и рассмотрим.

2. Сферическая абберация. Эта абберация вызывается членом третьей степени $A\sigma^2\boldsymbol{\sigma}$, так что при наличии одной только сферической абберации $|\Delta\mathbf{r}'| = A\sigma^3 = \text{const}$. Следовательно, абберационной кривой будет *окружность* с центром в парааксиальном фокусе и с радиусом $A\sigma^3$. Каждая точка будет изображаться в виде кружка рассеяния, радиус которого пропорционален кубу радиуса входного зрачка и не зависит от положения этой точки. Освещенность кружка рассеяния быстро убывает от центра к краям.

Происхождение сферической абберации наглядно пояснено на рис. 56. Пусть точечный объект лежит на главной оптической оси системы. Выходящие из него парааксиальные лучи встречают пло-

скость параксиальных изображений в точке G . Лучи, проходящие через окружность выходного зрачка DD' , сойдутся на оптической оси в точке M , которая может лежать как ближе, так и дальше G . Лучи, проходящие через какую-либо окружность в плоскости выходного зрачка, concentрическую с окружностью DD' , сойдутся на оптической оси между точками M и G . Расстояние MG называется *продольной сферической aberrацией*. Если в плоскости параксиальных изображений AA' поместить экран, то на нем получится светлый кружок радиуса GA . Радиус GA называется *поперечной сферической aberrацией*. С точностью до членов третьего порядка включительно поперечная aberrация пропорциональна кубу апертуры $2u$. Отсюда следует, что продольная aberrация пропорциональна квадрату апертуры.

Если экран перемещать от плоскости AA' по направлению к M , то радиус кружка рассеяния сначала будет уменьшаться, а затем начнет увеличиваться. Нетрудно показать, что наименьший кружок рассеяния получится, когда экран займет положение BB' на расстоянии

$\frac{3}{4}MG$ от плоскости параксиальных изображений AA' . Однако плоскость BB' , строго говоря, не будет плоскостью наилучшей отчетливости изображения. При нахождении последней необходимо учитывать не только размеры кружка рассеяния, но и *распределение освещенности* внутри этого кружка. Исходя из дифракционных соображений, можно показать, что при наличии одной только сферической aberrации плоскость наилучшей отчетливости изображения проходит посередине между точками M и G .

Сферическая aberrация есть единственная из геометрических aberrаций, остающаяся и в том случае, когда точка-объект находится на главной оптической оси системы. Все прочие геометрические aberrации в этом случае исчезают. Это верно в любом приближении, а не только для aberrаций третьего порядка.

3. Кома. Если в разложении (15.1) отличны от нуля только коэффициенты B и D , то соответствующая aberrация называется *комой*. В этом случае

$$\Delta r' = B(\sigma r)\sigma + D\sigma^2 r.$$

Отсюда легко получить

$$\left[\Delta r' - \left(D + \frac{B}{2}\right)\sigma^2 r\right]^2 = \left(\frac{B}{2}\sigma^2 r\right)^2.$$

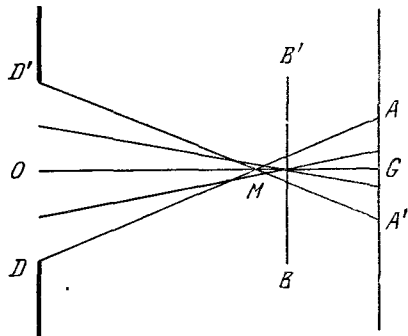


Рис. 56.

Следовательно, абберрационной кривой будет *окружность* радиуса $\frac{1}{2}B\sigma^2 r$, центр которой смещен от паракисального фокуса в направлении вектора r на расстояние $(D + \frac{1}{2}B)\sigma^2 r$. Теперь легко получить представление о характере изображения точечного объекта при наличии одной только комы в отсутствие других абберраций. Для этого проведем в плоскости входного зрачка произвольную окружность, центр которой совпадает с центром зрачка. Лучи, исходящие из точечного объекта и проходящие через эту окружность, пересекут плоскость паракисального изображения также по окружности.

Совокупность таких окружностей и даст изображение рассматриваемого точечного объекта в этой плоскости. Окружности имеют две прямолинейные огибающие, пересекающиеся в паракисальном фокусе и составляющие

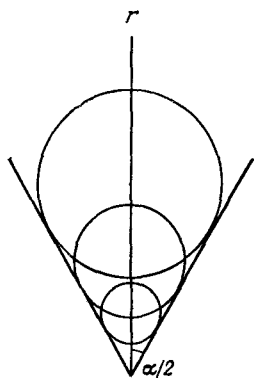


Рис. 57.

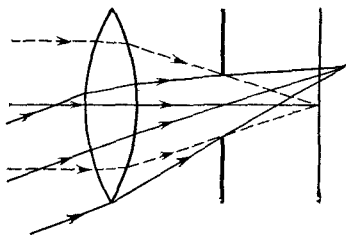


Рис. 58.

между собой угол α , определяемый соотношением $\sin(\alpha/2) = B/(B + 2D)$. Более подробное исследование, которое мы не приводим, показывает, что $B = 2D$, а потому $\alpha = 60^\circ$. Направление вектора r является биссектрисой угла между огибающими (рис. 57). Изображение точки, таким образом, напоминает комету. Отсюда и произошло название «кома».

Происхождение комы ясно из рис. 58. Она обусловлена косыми пучками лучей.

4. Астигматизм косых пучков и искривление плоскости изображения. Эти абберрации удобно рассматривать совместно, так как обе они обусловлены членами первой степени по σ и второй степени по r . Они возникают, когда оба коэффициента C и E или один из них отличны от нуля. Если все прочие коэффициенты равны нулю, то формула (15.1) переходит в

$$\Delta r' = Cr^2\sigma + E(\sigma r)r. \quad (15.2)$$

Для определения формы абберрационной кривой ось Y проведем через точку-объект P . Тогда $r = yf$. Уравнение окружности входного зрачка запишем в параметрической форме $\eta = \sigma \cos \varphi$, $\zeta =$

$= \sigma \sin \varphi$, где φ — центральный угол, рассматриваемый как параметр. Таким путем из предыдущего соотношения получаем уравнение абберационной кривой:

$$\begin{aligned} \Delta y' &= (C + E) y^2 \eta = (C + E) \sigma y^2 \cos \varphi, \\ \Delta z' &= C y^2 \zeta = C \sigma y^2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Это — эллипс, центр которого находится в параксиальном фокусе, оси параллельны координатным осям Y и Z , а их длины пропорциональны радиусу входного зрачка и квадрату расстояния изображаемой точки от главной оптической оси. Изображением точки будет светлое пятнышко, ограниченное абберационной кривой. Это указывает на то, что пучок лучей, дающий изображение, — астигматический. При параллельном смещении экрана, на котором получается изображение, вдоль оптической оси оно по-прежнему сохраняет форму эллипса, но форма и размеры эллипса изменяются. При двух положениях экрана эллипс вырождается в прямолинейные отрезки, один из которых параллелен оси Y , а другой — оси Z .

Для доказательства поместим начало координат в центре выходного зрачка и будем характеризовать луч в пространстве изображений точками пересечения его с плоскостью выходного зрачка и с плоскостью параксиального изображения. Координаты первой точки будут $(0, \eta', \zeta')$, второй — $(x', y' + \Delta y', \Delta z')$. Если X, Y, Z — текущие координаты, то уравнение рассматриваемого луча запишется в виде

$$Y = \eta' + \frac{y' + \Delta y' - \eta'}{x'} X, \quad Z = \zeta' + \frac{\Delta z' - \zeta'}{x'} X.$$

Полагая здесь $\eta' = \zeta' = \Delta y' = \Delta z' = 0$, найдем поперечные координаты параксиального фокуса: $Y_0 = y' X/x'$, $Z_0 = 0$ (продольная координата того же фокуса равна x'). Таким образом,

$$\begin{aligned} Y - Y_0 &= \left(1 - \frac{X}{x'}\right) \eta' + \frac{X}{x'} \Delta y', \\ Z - Z_0 &= \left(1 - \frac{X}{x'}\right) \zeta' + \frac{X}{x'} \Delta z'. \end{aligned} \quad (15.4)$$

В последних слагаемых в окрестности параксиального фокуса можно считать $X = x'$, так как это вносит ошибки высшего порядка малости, не учитываемые в рассматриваемом приближении. По той же причине в формулах (15.3) можно положить $y = y'/\beta_1$, $z = z'/\beta_1$, $\eta = \eta'/\beta_2$, $\zeta = \zeta'/\beta_2$, где β_1 и β_2 — линейные поперечные увеличения для объектов, лежащих соответственно в предметной плоскости и в плоскости входного зрачка, как они выражаются в параксиальном приближении. Учтя еще, что y и Y являются лишь различными обозначениями одной и той же ординаты, можем записать (15.3) в виде

$$\Delta y' = \frac{C' + E'}{x'} \eta' Y^2, \quad \Delta z' = \frac{C'}{x'} \zeta' Y^2,$$

где C' и E' — новые постоянные, а абсцисса x' введена в знаменателе для удобства. В результате всего этого формулы (15.4) в окрестности паракиального фокуса преобразуются в

$$\begin{aligned} Y - Y_0 &= \frac{\eta'}{x'} [x' - X + (C' + E') Y^2], \\ Z - Z_0 &= \frac{\zeta'}{x'} [x' - X + C' Y^2]. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Если

$$X - x' = (C' + E') Y^2, \quad (15.6)$$

то $Y - Y_0 = 0$, т. е. эллипс вырождается в прямолинейный отрезок, параллельный оси Z . Это есть *фокальный отрезок*, образованный *меридиональными лучами*. Аналогично, если

$$X - x' = C' Y^2, \quad (15.7)$$

то $Z - Z_0 = 0$, и эллипс переходит в другой *фокальный отрезок*, параллельный оси Y . Он образуется *экваториальными лучами*. От вращения кривых (15.6) и (15.7) вокруг главной оптической оси получаются две поверхности, касающиеся друг друга в общей точке пересечения их с главной оптической осью. Эти две поверхности и образуют *каустика лучей*, прошедших через оптическую систему. Вообще говоря, они имеют только одну общую точку. Каустика и есть та поверхность, в которую переходит плоскость изображения паракиальной оптики. Таким образом, имеет место не только астигматизм, но и *искривление поверхности изображения*.

5. Д и с т о р с и я. Коэффициент F не равен нулю, все прочие коэффициенты равны нулю. Поэтому из (15.1) получаем

$$\Delta r' = Fr^3.$$

Отсюда видно, что при наличии только рассматриваемой аберрации каждая точка изображается резко в виде точки, каковы бы ни были размеры диафрагмы. Однако отклонение изображения точки от соответствующего паракиального фокуса пропорционально кубу ее расстояния r от главной оптической оси. Поэтому происходит *искажение (дисторсия) изображения*. Прямые линии, проходящие через главную оптическую ось, изображаются в виде прямых. Все прочие прямые при изображении искривляются. При положительном F изображения точек смещаются относительно соответствующих паракиальных фокусов *наружу*, т. е. от главной оптической оси. Такая дисторсия называется *подушкообразной* (рис. 59, б). При отрицательном F смещения происходят *внутрь* — к главной оптической оси. Соответствующая дисторсия называется *бочкообразной* (рис. 59, в).

Все эти выводы сохраняются в силе и для *аббераций высших порядков*. В общем случае дисторсия обусловлена всеми членами разложения $\Delta r'$, не содержащими степеней радиуса входного зрачка σ . В любом приближении при наличии одной только дисторсии точка всегда изображается в виде точки, каковы бы ни были размеры диафрагмы.

6. Устранение (точнее — ослабление) геометрических аббераций на практике достигается комбинацией различных линз (и зеркал), изготовляемых из оптического стекла с различными оптическими характеристиками. Полное устранение всех аббераций невозможно. На практике речь может идти только об определенном оптимуме, зависящем от задач, которые

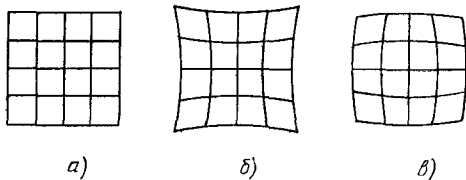


Рис. 59.

должен решать оптический прибор. Наиболее вредными из всех аббераций третьего порядка являются обычно сферическая абберация и кома. В большинстве случаев их надо как можно больше ослабить. Уменьшая диафрагму, можно практически полностью устранить обе эти абберации. После этого подбором линз надо устранить дисторсию, а затем астигматизм и изгиб поверхности изображения. Но уменьшение диафрагмы уменьшает яркость изображения и увеличивает дифракционные ошибки. Дисторсия вредна в фотографических объективах. В астрономических приборах ее можно допускать, так как она не влияет на резкость изображения, а вызывает только искажение его, которое можно учесть вычислением.

§ 16. Хроматическая абберация

1. Если используется белый свет, то в изображении возникают дополнительные абберации. Действительно, показатель преломления зависит от длины волны (дисперсия света). Поэтому оптическая система дает не одно, а множество монохроматических изображений, отличающихся друг от друга по величине и положению. В этом можно убедиться, разложив белый свет на монохроматические составляющие и воспользовавшись принципом суперпозиции. Результирующее изображение, получающееся от наложения таких монохроматических изображений, оказывается нерезким и с окрашенными краями. Это явление называется *хроматической абберацией*, или *хроматизмом*.

Хроматическая абберация устраняется путем комбинации линз, изготовленных из стекла с различными оптическими свойствами. Устранение ее для всех лучей спектра невозможно. Обычно совме-