

Все эти выводы сохраняются в силе и для *аббераций высших порядков*. В общем случае дисторсия обусловлена всеми членами разложения $\Delta r'$, не содержащими степеней радиуса входного зрачка σ . В любом приближении при наличии одной только дисторсии точка всегда изображается в виде точки, каковы бы ни были размеры диафрагмы.

6. Устранение (точнее — ослабление) геометрических аббераций на практике достигается комбинацией различных линз (и зеркал), изготовляемых из оптического стекла с различными оптическими характеристиками. Полное устранение всех аббераций невозможно. На практике речь может идти только об определенном оптимуме, зависящем от задач, которые

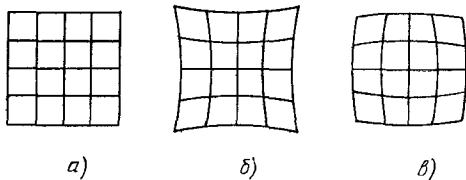


Рис. 59.

должен решать оптический прибор. Наиболее вредными из всех аббераций третьего порядка являются обычно сферическая абберация и кома. В большинстве случаев их надо как можно больше ослабить. Уменьшая диафрагму, можно практически полностью устранить обе эти абберации. После этого подбором линз надо устранить дисторсию, а затем астигматизм и изгиб поверхности изображения. Но уменьшение диафрагмы уменьшает яркость изображения и увеличивает дифракционные ошибки. Дисторсия вредна в фотографических объективах. В астрономических приборах ее можно допускать, так как она не влияет на резкость изображения, а вызывает только искажение его, которое можно учесть вычислением.

§ 16. Хроматическая абберация

1. Если используется белый свет, то в изображении возникают дополнительные абберации. Действительно, показатель преломления зависит от длины волны (дисперсия света). Поэтому оптическая система дает не одно, а множество монохроматических изображений, отличающихся друг от друга по величине и положению. В этом можно убедиться, разложив белый свет на монохроматические составляющие и воспользовавшись принципом суперпозиции. Результирующее изображение, получающееся от наложения таких монохроматических изображений, оказывается нерезким и с окрашенными краями. Это явление называется *хроматической абберацией*, или *хроматизмом*.

Хроматическая абберация устраняется путем комбинации линз, изготовленных из стекла с различными оптическими свойствами. Устранение ее для всех лучей спектра невозможно. Обычно совме-

щают изображения только для каких-либо двух лучей с различными длинами волн. Тогда говорят, что оптическая система *ахроматизована* или *исправлена в хроматическом отношении*. Оставшаяся хроматическая aberrация называется *вторичным спектром*. В большинстве случаев на практике она уже не сказывается существенно на качестве изображения. Выбор лучей, для которых должна быть ахроматизована оптическая система, определяется ее назначением. В случае визуальных приборов эти лучи надо выбирать по разные стороны вблизи желто-зеленой области спектра, к которой наиболее чувствителен человеческий глаз. Обычно в таких приборах ахроматизация производится для фраунгоферовых линий с длинами волн $\lambda_C = 656,3$ нм и $\lambda_F = 486,1$ нм. В фотографических аппаратах ахроматизация осуществляется для лучей, лежащих ближе к синему концу спектра, так как эти лучи сильнее действуют на фотографическую пластинку. Здесь обычно ахроматизация выполняется для фраунгоферовых линий с длинами волн $\lambda_D = 589,3$ нм и $\lambda_G = 434,0$ нм.

Для полной ахроматизации, т. е. совмещения изображений двух цветов (например, красных и синих), необходимо, чтобы были равны не только фокусные расстояния для этих цветов, но и совпадали соответствующие им главные плоскости. Однако во многих случаях достаточна уже *частичная ахроматизация*, т. е. либо равенство только фокусных расстояний без точного совмещения главных плоскостей, либо совмещение только главных плоскостей без точного равенства фокусных расстояний. Это зависит от назначения прибора и определяется тем, что в его работе важнее — увеличение изображения или его местоположение. Так, в окулярах зрительных труб и микроскопов главный интерес представляют углы, под которыми глаз видит различные окрашенные изображения предмета. Для равенства этих углов необходимо, чтобы окуляры были ахроматизованы в смысле одинаковости фокусных расстояний (см. § 24, пункт 4).

Подробное рассмотрение ахроматизации дается в руководствах по расчету оптических систем. Здесь мы можем остановиться только на простейших принципиальных вопросах и притом только в *параксиальном приближении*. В высших приближениях также возникает хроматическая aberrация, устранение которой требует выполнения особых условий. Но мы не будем их рассматривать.

2. Ахроматизацию фокусного расстояния можно получить с помощью уже одной толстой линзы (см. задачу 2). Однако этот способ не имеет практического значения. Практически более важной является монохроматизация тонкой линзы или системы тонких линз.

Рассмотрим сначала одиночную тонкую линзу или систему тонких линз и подсчитаем, как меняется ее фокусное расстояние при малых изменениях показателя преломления. Взяв логарифмическую

производную от выражения (10.9), получим

$$\frac{\delta f}{f} = -\frac{\delta n}{n-1}. \quad (16.1)$$

Так как показатель преломления уменьшается с увеличением длины волны, то из этой формулы следует, что фокусное расстояние f по абсолютной величине больше для красных лучей, чем для синих.

По сравнению с изменением фокусного расстояния положения главных плоскостей линзы меняются ничтожно. Рассмотрим, например, это изменение для главной плоскости пространства предметов. Для не слишком толстой линзы можно воспользоваться формулой (12.21), из которой находим: $\delta h/h = -\delta n/n$, и следовательно,

$$\frac{\delta h}{\delta f} = \frac{h}{f} \frac{n-1}{n} = -\frac{d}{R_2} \left(\frac{n-1}{n} \right)^2.$$

Так как даже для сравнительно толстой линзы, как правило, $d \ll R_2$ и, кроме того, $n-1 < n$, то $\delta h \ll \delta f$. Поэтому тонкая линза будет практически полностью ахроматизована, когда ахроматизовано ее фокусное расстояние.

В практических расчетах принимается, что формула (16.1) приближенно справедлива и для конечных изменений показателя преломления. В случае визуальных приборов полагают $\delta n = n_C - n_F$ и вводят величину

$$v = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}, \quad (16.2)$$

где n_D — показатель преломления для желтой D -линии натрия $\lambda = 589,3$ нм. Эта величина называется *коэффициентом дисперсии*, или *числом Аббе*. (Вместо n_D в числителе можно взять показатель преломления для любой другой длины волны из видимой области спектра, так как от этого v изменится самое большее на 2%.) В результате формула (16.1) преобразуется к виду

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{1}{v}, \quad (16.3)$$

откуда

$$\delta \frac{1}{f} = -\frac{1}{fv}. \quad (16.4)$$

В табл. 2 приведены оптические характеристики некоторых марок оптического стекла. Разность показателей преломления $n_F - n_C$ называется *средней дисперсией*, отношения

$$(n_F - n_D)/(n_F - n_C), \quad (n_D - n_F)/(n_F - n_C)$$

и аналогичные им — *относительными* или *частными дисперсиями*.

Таблица 2

Марка стекла	n_D	$n_F - n_C$	$n_F - n_D$	$n_G - n_F$	ν
ЛК 6	1,4704	0,00704	0,00493	0,00339	66,8
К 1	1,4982	0,00765	0,00535	0,00423	65,1
К 3	1,5100	0,00805	0,00565	0,00451	63,4
К 14	1,5147	0,00849	0,00597	0,00477	60,6
БК 4	1,5302	0,00877	0,00617	0,00495	60,5
БК 6	1,5399	0,00905	0,00637	0,00513	59,7
ТК 2	1,5724	0,00996	0,00702	0,00567	57,5
ТК 21	1,6568	0,01285	0,00910	0,00745	51,1
ЛФ 1	1,5406	0,01145	0,00812	0,00673	47,2
ЛФ 7	1,5783	0,01407	0,01002	0,00843	41,1
Ф 6	1,6031	0,01590	0,01135	0,00903	37,9
Ф 8	1,6248	0,01757	0,1260	0,01088	35,6
БФ 1	1,5247	0,00955	0,00674	0,00547	54,9
БФ 28	1,6641	0,01874	0,01342	0,01145	35,4
ТФ 1	1,6475	0,01912	0,01369	0,01172	33,9
ТФ 5	1,7550	0,02743	0,01972	0,01728	27,5

Обозначения: ЛК—легкий крон, К—крон, БК—баритовый крон, ТК—тяжелый крон, ЛФ—легкий флинт, Ф—флинт, БФ—баритовый флинт, ТФ—тяжелый флинт.

3. Рассмотрим теперь ахроматизацию тонкой линзы, сложенной из двух тонких линз, прижатых вплотную друг к другу. Обозначим через n_1 и f_1 показатель преломления и фокусное расстояние первой линзы, а через n_2 и f_2 — второй. Фокусное расстояние составной линзы находится по формуле

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (16.5)$$

Оно будет одно и то же для длин волн λ_F и λ_C , если выполнено условие

$$\delta \frac{1}{f} = - \left(\frac{1}{f_1 v_1} + \frac{1}{f_2 v_2} \right) = 0, \quad (16.6)$$

или

$$f_1 v_1 + f_2 v_2 = 0. \quad (16.7)$$

Это и есть *условие ахроматизации составной линзы*. Так как коэффициенты дисперсии для всех оптических стекол положительны, то из равенства (16.6) следует, что фокусные расстояния f_1 и f_2 должны иметь *противоположные знаки*. Из уравнений (16.5) и (16.6) находим

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} \frac{v_1}{v_1 - v_2}, \quad \frac{1}{f_2} = - \frac{1}{f} \frac{v_2}{v_1 - v_2}. \quad (16.8)$$

Если общее фокусное расстояние f положительно, то линза с большим коэффициентом дисперсии будет иметь положительное, а линза с меньшим коэффициентом дисперсии — отрицательное фокусное расстояние. В частности, собирающая линза должна делаться из кроны, а рассеивающая — из флинта (см. табл. 2).

Если задано фокусное расстояние f составной линзы, а также указаны сорта стекол, из которых изготовлены первая и вторая линзы, то фокусные расстояния f_1 и f_2 определяются из уравнений (16.8). Тем самым по формуле (10.9) определяются разности $\frac{1}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{R_2^{(1)}}$ и $\frac{1}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{R_2^{(2)}}$, где $R_1^{(1)}$ и $R_2^{(1)}$ — радиусы сферических поверхностей первой, а $R_1^{(2)}$ и $R_2^{(2)}$ — второй линз. Два из этих радиусов можно выбрать произвольно. Если линзы 1 и 2 должны склеиваться, то надо положить $R_2^{(1)} = R_1^{(2)}$. Остается еще один радиус (или, в общем случае, один свободный параметр). Им целесообразно распорядиться так, чтобы сделать сферическую aberrацию возможно меньше (см. задачу 1).

Ахроматические пары тонких склеенных линз широко применяются в объективах микроскопов. Каждая пара состоит из двояковыпуклой линзы из кроны, склеенной с плоско-вогнутой линзой из флинта, плоская поверхность которой обращена в сторону падающего света.

4. Если составные части (подсистемы) сложной оптической системы *полностью ахроматизованы*, то будет *полностью ахроматизована* и система в целом. Действительно, так как первая подсистема полностью ахроматизована, то изображения, даваемые ею, совмещаются в двух цветах. Рассматривая совмещенные изображения как предмет для второй подсистемы, найдем, что изображения, даваемые и этой подсистемой, также совмещаются для тех же двух цветов. Применив это рассуждение для всех подсистем, найдем, что совмещение изображений будет иметь место и для системы в целом.

Обратное утверждение *не справедливо*. Система может быть полностью ахроматизована без того, чтобы были полностью ахроматизованы ее составные части. Однако, если система состоит из двух тонких линз, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, то справедливо и обратное утверждение. Действительно, пусть x_1, x'_1 и y_1, y'_1 — абсциссы и ординаты точки-предмета и ее промежуточного изображения, даваемого первой линзой, причем за начало координат принят центр этой линзы. Пусть x_2, y_2 и x'_2, y'_2 имеют тот же смысл для второй линзы, причем роль предмета в этом случае играет промежуточное изображение. Очевидно, ординаты промежуточного изображения y'_1 и y_2 одинаковы, а абсциссы x'_1 и x_2 связаны соотношением $x'_1 = x_2 + l$, где l — расстояние между линзами. Поперечные увеличения первой и второй линз равны

соответственно

$$\frac{y'_1}{y_1} = \frac{x'_1}{x_1}, \quad \frac{y'_2}{y_2} = \frac{x'_2}{x}.$$

Отсюда с учетом соотношения $y'_1 = y_2$ находим

$$\frac{y'_2}{y_1} = \frac{x'_1 x'_2}{x_1 x_2}, \quad (16.9)$$

т. е. поперечное увеличение всей системы. По условию сложная система полностью ахроматизована, а потому увеличение должно быть одно и то же для обоих рассматриваемых нами цветов. Значит, вариация левой, а с ней и правой части равенства (16.9) обращается в нуль. Но абсцисса предмета x_1 постоянна, а абсцисса окончательного изображения x'_2 одинакова для обоих цветов. Поэтому, взяв вариацию логарифма от правой части (16.9), получим: $\frac{\delta x'_1}{x'_1} - \frac{\delta x_2}{x_2} = 0$. Кроме того, из соотношения $x'_1 = x_2 + l$, ввиду постоянства расстояния l между линзами, следует: $\delta x'_1 = \delta x_2$. Таким образом, $\left(\frac{1}{x'_1} - \frac{1}{x_2}\right) \delta x'_1 = 0$. Если $\frac{1}{x'_1} - \frac{1}{x_2} \neq 0$, т. е. $l \neq 0$, то $\delta x'_1 = 0$, т. е. промежуточные изображения совмещаются в обоих цветах. Но это означает, что первая линза полностью ахроматизована. Учтя свойство обратимости световых лучей, убедимся, что полностью ахроматизована и вторая линза. Исключение составляет случай, когда $\frac{1}{x'_1} - \frac{1}{x_2} = 0$. В этом случае линзы вплотную прижаты друг к другу ($l = 0$), и ахроматизация возможна даже тогда, когда каждая из линз не ахроматизована. Такой случай был разобран выше.

5. Таким образом, чтобы система из двух тонких линз, расстояние l между которыми не равно нулю, была полностью ахроматизована, необходимо, чтобы были в отдельности полностью ахроматизованы обе составляющие ее линзы. Однако, если не требовать полной ахроматизации системы, а ограничиться только ахроматизацией ее фокусных расстояний, то такая ахроматизация может быть получена и с неахроматизованными линзами.

Действительно, фокусное расстояние системы из двух тонких линз определяется формулой (12.8). Из нее находим условие ахроматизации фокусного расстояния:

$$\delta \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{f_1} - \frac{l}{f_1 f_2}\right) \frac{\delta n_1}{n_1 - 1} + \left(\frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2}\right) \frac{\delta n_2}{n_2 - 1} = 0, \quad (16.10)$$

где n_1 — показатель преломления первой линзы, а n_2 — второй. Если n_1 и n_2 одинаковы, то это условие переходит в

$$l = \frac{1}{2} (f_1 + f_2). \quad (16.11)$$

Таким образом, система из двух тонких линз, изготовленных из одного и того же стекла, будет ахроматизована в отношении фокусного расстояния и притом для всех цветов спектра, если расстояние между линзами равно полусумме их фокусных расстояний. Такой способ ахроматизации применяется в окулярах зрительных труб (см. § 24).

6. Объективы, в которых ахроматизация выполнена для двух цветов спектра, называются *ахроматами*. В некоторых оптических системах (в объективах микроскопов, длиннофокусных астрономических труб и спектральных аппаратов) наличие вторичного спектра (см. пункт 1) существенно ухудшает качество изображения.

Аббе ввел в микроскопию *апохроматы*, т. е. объективы, в которых ахроматизация выполнена для трех цветов спектра и, кроме того, удовлетворено условие синусов (см. § 18). Остающаяся при этом хроматическая aberrация называется *третьичным спектром*.

7. В заключение упомянем о *сложных призмах*, изготовляемых из стекол различных сортов. На рис. 60 изображена ахроматическая призма. Первая призма, из крона, отклоняет и рассеивает лучи. Вторая призма, из флинта, отклоняет их в противоположную сторону. Рассеивающая способность (дисперсия) флинта больше, чем

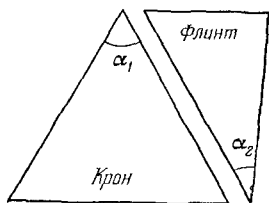
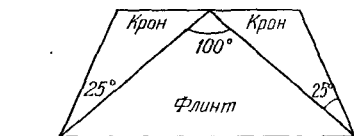


Рис. 60.



а)



б)

Рис. 61.

крона. Поэтому вторую призму можно подобрать так, чтобы компенсировать рассеивающую способность первой призмы, т. е. добиться одинаковости направлений каких-либо двух лучей (например, красного и фиолетового) при их выходе из рассматриваемой системы. Однако отклонение лучей, вызываемое первой призмой, компенсируется лишь частично. В результате белый луч проходит через сложную призму без заметной дисперсии, но испытывает отклонение в сторону.

На рис. 61, а изображена *дисперсионная призма*, применяемая в спектрографах. У нее дисперсия очень значительна благодаря большому преломляющему углу внутренней призмы из флинта. Боковые призмы из крона мало влияют на общую дисперсию призмы,

но сильно уменьшают отклонение лучей, так как угол между их наружными гранями сравнительно невелик. Кроме того, эти призмы позволяют увеличить преломляющий угол внутренней призмы, величина которого лимитируется полным отражением. Наконец, на рис. 61, б изображена *призма прямого зрения*. Она производит спектральное разложение, но оставляет неотклоненным средний луч пучка света.

ЗАДАЧИ

1. Рассчитать ахроматический объектив с фокусным расстоянием $f = 50$ см, склеенный из двух линз. Передняя линза изготовлена из крона К 1, задняя — из флинта Ф 8. Задняя линза — выпукло-вогнутая, обращена выпуклой поверхностью наружу, радиус кривизны этой поверхности равен 100 см.

Решение. Из табл. 2 находим для первой линзы: $v_1 = 65,1$, $n_D = 1,4982$; для второй линзы $v_2 = 35,6$, $n_D = 1,6248$. По формулам (16.8) вычисляем фокусные расстояния линз:

$$f_1 = f \frac{v_1 - v_2}{v_1} = 50 \cdot \frac{65,1 - 35,6}{65,1} = 22,66 \text{ см,}$$

$$f_2 = -f \frac{v_1 - v_2}{v_2} = -50 \cdot \frac{65,1 - 35,6}{35,6} = -41,43 \text{ см.}$$

По условию задачи $R_2^{(2)} = -100$ см. По формуле (10.9) находим $R_1^{(2)}$:

$$R_1^{(2)} = \frac{(n-1)f_2 R_2^{(2)}}{(n-1)f_2 + R_2^{(2)}} = \frac{0,6248 \cdot 41,43 \cdot 100}{0,6248 \cdot 41,43 - 100} = -20,56 \text{ см.}$$

Той же величине равен радиус $R_2^{(1)}$, так что

$$R_1^{(1)} = \frac{(n-1)f_1 R_2^{(1)}}{(n-1)f_1 + R_2^{(1)}} = -\frac{0,4982 \cdot 22,66 \cdot 20,56}{0,4982 \cdot 22,66 - 20,56} = 25,02 \text{ см.}$$

Вид рассчитанного объектива изображен на рис. 62.

2. Возможна ли ахроматизация толстой одиночной линзы относительно фокусных расстояний для двух длин волн?

Ответ. Ахроматизация возможна потому, что в формулу для фокусного расстояния толстой линзы входит n^2 . Следовательно, для заданного фокусного расстояния могут существовать два значения показателя преломления n_1 и n_2 , которым соответствует это фокусное расстояние. Толщина линзы должна быть равна

$$d = \frac{n^2}{n^2 - 1} (R_1 - R_2),$$

где $n = \sqrt{n_1 n_2}$ — среднее геометрическое из n_1 и n_2 . Так как толщина d существенно положительна, то для возможности ахроматизации необходимо, чтобы $R_1 - R_2 > 0$. Этому условию удовлетворяют только двояковыпуклые и плоско-вогнутые линзы. Все прочие толстые линзы не могут быть ахроматизованы.

3. Написать условие ахроматизации преломляющей призмы для двух близких цветов. Призма состоит из двух призм

с малыми преломляющими углами, изготовленных из стекол с коэффициентами дисперсии v_1 и v_2 .



Рис. 62.

О т в е т. Призмы должны быть обращены преломляющими углами в противоположные стороны. Условие ахроматизации: $\frac{\varphi_1}{v_1} - \frac{\varphi_2}{v_2} = 0$, где φ_1 — угол отклонения луча, даваемый первой призмой, а φ_2 — второй. Если $v_1 \neq v_2$, то результирующее отклонение $\varphi_1 - \varphi_2$ отлично от нуля.

§ 17. Условие отсутствия дисторсии

1. В фотографическом объективе особо важное значение имеет устранение изгиба плоскости изображения и дисторсии. Найдем *условие отсутствия дисторсии*. Пусть PP_1P_2 (рис. 63) — плоскость предмета, $P'P'_1P'_2$ — сопряженная ей плоскость изображения, O и O' — центры входного и выходного зрачков. Проведем главные лучи P_1O и P_2O от точек предметной плоскости через центр входного зрачка. Сопряженные им лучи P'_1O' и P'_2O' пройдут через центр O' выходного зрачка. Обозначим через u и u' углы наклона этих лучей к главной оптической оси. Тогда $PP_1 = PO \operatorname{tg} u_1$, $P'P'_1 = P'O' \operatorname{tg} u'_1$, $PP_2 = PO \operatorname{tg} u_2$, $P'P'_2 = P'O' \operatorname{tg} u'_2$, и следовательно,

$$\frac{P'P'_1}{PP_1} = \frac{\operatorname{tg} u'_1}{\operatorname{tg} u_1}, \quad \frac{P'P'_2}{PP_2} = \frac{\operatorname{tg} u'_2}{\operatorname{tg} u_2}.$$

Отсутствие дисторсии означает, что поперечные увеличения $P'P'_1/PP_1$ и $P'P'_2/PP_2$ одинаковы при любых положениях точек P_1 и P_2 . Следовательно, для устранения дисторсии необходимо и достаточно, чтобы соблюдалось равенство

$$\frac{\operatorname{tg} u'_1}{\operatorname{tg} u_1} = \frac{\operatorname{tg} u'_2}{\operatorname{tg} u_2}, \quad (17.1)$$

каковы бы ни были значения углов u_1 и u_2 . Это равенство называется *условием тангенсов*, или *условием ортоскопии*. Точки O и O' главной оптической оси, удовлетворяющие этому условию, называются *ортоскопическими точками*. Центры входного и выходного зрачков являются центрами перспективы предмета и его изображения. Таким образом, условие отсутствия дисторсии сводится к требованию, чтобы эти центры перспективы были ортоскопическими точками.

2. Простейшим примером, где выполнено условие ортоскопии, может служить симметричный фотографический объектив, изображенный на рис. 64. Он состоит из двух совершенно одинаковых ахроматизованных двойных линз, обращенных друг к другу вогну-

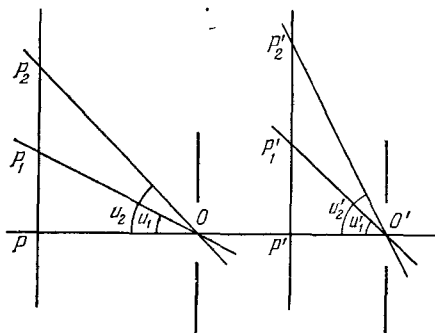


Рис. 63.