

тыми поверхностями. Апертурная диафрагма помещена посередине между этими линзами. Так как она расположена близко к обеим линзам, то оба изображения ее мнимые, прямые и лежат обычно внутри объектива недалеко от диафрагмы A_1A_2 . Изображение D_1D_2 , даваемое передней линзой, лежит справа от диафрагмы A_1A_2 и служит входным зрачком системы; изображение $D'_1D'_2$, даваемое

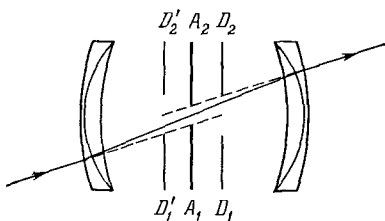


Рис. 64.

задней линзой, лежит левее диафрагмы A_1A_2 и служит выходным зрачком. Выходной зрачок $D'_1D'_2$ есть изображение входного зрачка D_1D_2 , даваемое всей оптической системой.

Как видно из рис. 64, это изображение производится с поперечным увеличением $+1$. Поэтому плоскости входного и выходного зрачков являются главными плос-

костями, а центры этих зрачков — главными точками объектива. Возьмем теперь любой падающий луч, продолжение которого проходит через центр входного зрачка. Тогда, ввиду симметрии, продолжение выходящего луча пройдет через центр выходного зрачка, а самый луч внутри системы — через центр апертурной диафрагмы. Следовательно, углы наклона u и u' этих главных лучей к главной оптической оси будут всегда одинаковы, каковы бы ни были значения самих углов u и u' . Это значит, что в рассматриваемой системе соблюдено условие ортоскопии.

§ 18. Условие синусов Аббе

1. В микроскопах изучаемые объекты малы и помещаются перед объективом вблизи главной оптической оси. Апертуры лучей, формирующих изображение в микроскопе, должны быть как можно шире (в лучших объективах микроскопов апертуры практически доведены до своего теоретического предела 180°). От этого увеличивается яркость изображения, а главное повышается разрешающая сила объектива, т. е. его способность различать мелкие детали (см. § 56). Поэтому сопряженные точки главной оптической оси, в первой из которых помещается объект, а во второй получается его изображение, даваемое объективом, должны быть *анаберрационными*, т. е. точка P должна изображаться в виде точки P' широкими пучками лучей (см. § 9). Однако этого условия еще недостаточно. Необходимо, чтобы без aberrаций изображались все точки малого участка предметной плоскости, проходящей через точку P перпендикулярно к главной оптической оси. Практически речь идет об устранении сферической aberrации и комы. Анаберрационные точки

главной оптической оси P и P' , удовлетворяющие этому условию, называются *апланатическими*.

Значение апланатизма было выяснено немецким физиком Аббе (1840—1905). Аббе был оптиком-теоретиком. Он не только глубоко понимал теорию оптических приборов, но и указал пути их совершенствования. Особое внимание он уделил теории и совершенствованию микроскопа. Его многолетнее плодотворное сотрудничество с известной оптической фирмой Цейсса (1816—1888) в Иене (Германия) привело к созданию и массовому производству лучших в мире оптических приборов, в которых практически было достигнуто то, что принципиально возможно с точки зрения волновой теории света. Аббе вывел необходимое и достаточное условие апланатизма, получившее название *условия синусов*. К выводу этого условия мы и перейдем.

2. Ввиду осевой симметрии оптической системы, при выводе достаточно ограничиться рассмотрением изображений не плоских площадок, а *прямолинейных отрезков* малой, но произвольной длины, перпендикулярных к главной оптической оси. Пусть один из таких отрезков, PQ , изображается широкими пучками лучей в виде отрезка $P'Q'$, также перпендикулярного к главной оптической

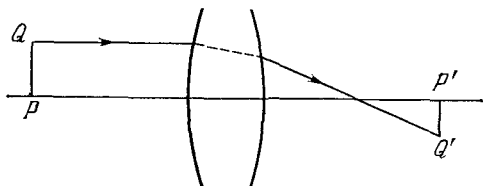


Рис. 65.

оси (рис. 65). Оптические длины всех лучей, соединяющих сопряженные точки P и P' , одинаковы. То же справедливо для лучей, соединяющих сопряженные точки Q и Q' .

Докажем, что оптическая длина (PP') любого луча, соединяющего апланатические точки P и P' , равна оптической длине (QQ') любого луча, соединяющего сопряженные точки Q и Q' . Иными словами, оптические длины лучей между сопряженными точками отрезка PQ и его изображения $P'Q'$ одинаковы для всех пар сопряженных точек. Ввиду отмеченного выше свойства оптических длин лучей, соединяющих сопряженные точки, достаточно доказать это утверждение для параксиальных лучей, выходящих из точек объекта PQ параллельно главной оптической оси. Волновой фронт, соответствующий таким лучам, после прохождения через объектив становится сферическим, малый участок которого можно считать плоским. Таким образом, объект PQ целиком лежит в плоскости падающего, а его изображение $P'Q'$ — в плоскости прошедшего волновых фронтов. Но оптические длины всех лучей между двумя положениями волнового фронта одинаковы. Отсюда и следует доказываемое утверждение.

Проведем теперь через точки отрезка PQ пучок параллельных лучей под произвольным углом u к главной оптической оси (рис. 66).

Так как лучи лежат в одной плоскости, то соответствующий им волновой фронт представится прямолинейным отрезком QA , перпендикулярным к лучам. После прохождения через объектив параллельность лучей нарушится. Однако ввиду малости объекта PQ будет мал и угол расхождения прошедших лучей. Пренебрегая им, можно считать, что все прошедшие лучи наклонены к оптической оси практически под одним и тем же углом u' . Соответствующий участок волнового фронта представится прямолинейным отрезком $Q'A'$. Ввиду одинаковости оптических длин всех лучей между волновыми фронтами $(AP'A') = (QQ')$. По доказанной только что

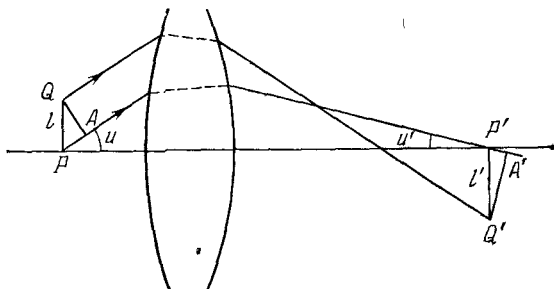


Рис. 66.

теореме $(PAP') = (QQ')$, и предыдущее соотношение переходит в $(PAP') = (AP'A')$. Вычитая из обеих частей этого равенства общую часть (AP') , получим: $(PA) = (P'A')$, или

$$nl \sin u = n'l' \sin u', \quad (18.1)$$

где l и l' — длины отрезков PQ и $P'Q'$, а n и n' — показатели преломления пространств предметов и изображений. Равенство (18.1) и выражает условие синусов Аббе. Оно должно выполняться для любых значений угла u и для любых малых значений длины отрезка l . Для параксиальных лучей условие синусов (18.1) переходит в теорему Лагранжа — Гельмгольца (10.6) и, следовательно, выполняется для любой пары сопряженных точек на главной оптической оси.

В следующем параграфе приводится более строгий вывод условия синусов, основанный на теореме косинусов.

3. К важному примеру апланатических точек приводит построение преломленного луча на поверхности шара, указанное Вейерштрассом (1815—1897). Пусть R — радиус шара, n — его показатель преломления относительно окружающей среды (рис. 67). Построим две концентрические с шаровой поверхностью сферы S и S' с радиусами nR и R/n . Продолжим падающий луч AB до пересечения в точке P со сферой S и соединим точку P с центром

шара O . Прямая OP пересечет сферу S' в точке P' . Прямая, соединяющая точку падения B с точкой P' , дает направление преломленного луча. Действительно, из подобия треугольников OBR и OBP' следует, что угол $OP'B$ равен углу падения φ , а потому

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{OB}{OP'} = n,$$

что и доказывает наше утверждение.

Из построения видно, что падающий пучок лучей, сходящийся в точке P , после преломления на шаровой поверхности будет сходящийся в точке P' . Обратное, если точечный источник поместить в P' , то после преломления получится пучок лучей, расходящихся из P . Следовательно, P и P' являются сопряженными анаберрационными точками и притом апланатическими.

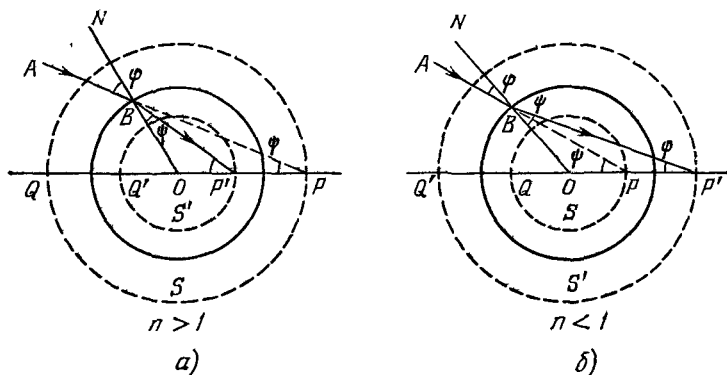


Рис. 67.

Действительно, ввиду шаровой симметрии не только точки P и P' , но и сферы S и S' отображаются друг в друга широкими пучками лучей. Так как обе сферы нормальны к прямой PP' , то точки P и P' должны удовлетворять условию синусов, в чем легко убедиться и непосредственно. Точки Q и Q' , очевидно, также апланатические. Наконец, центр сферы O можно рассматривать как пару совпадающих апланатических точек, являющихся одновременно узловыми точками системы.

Итак, на оптической оси QP имеется три пары изолированных апланатических точек: P и P' , Q и Q' и двойная апланатическая точка O .

4. Апланатические точки шара используются для построения *иммерсионных объективов* микроскопов с очень большими увеличениями. Иммерсионным называют такой объектив, когда между покровным стеклом и фронтальной линзой объектива находится

слой жидкости (*иммерсия*). Иммерсия была предложена Амичи (1786—1863) в 1840 г. С целью уменьшения вредного для качества изображения преломления на поверхности покровного стекла он заполнял водой промежуток между покровным стеклом и фронтальной линзой объектива. Аббе в 1878 г. стал применять *однородную иммерсию* с показателем преломления, почти равным показателю преломления покровного стекла и фронтальной линзы. В такой системе лучи, исходящие из каждой точки предмета, распространяются практически прямолинейно до выхода из фронтальной

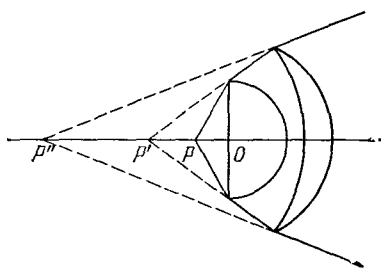


Рис. 68.

линзы объектива. В качестве однородной иммерсии применяется кедровое масло ($n = 1,515$). В однородной иммерсионной системе Аббе фронтальная линза объектива состоит из стеклянного полушария, плоская сторона которого обращена к предмету (рис. 68). Предмет помещается на расстоянии $OP = R/n$ от центра (R — радиус полушария). Так как лучи до выхода из фронтальной линзы не испытывают преломления, то P будет апланатической точкой. Изображение предмета получается в сопряженной апланатической точке P' на расстоянии $OP' = Rn$ от центра O . Как видно из построения Вейерштрасса, линейное увеличение равно n^2 . Поэтому из (18.1) следует $\sin u' = (\sin u)/n$, так что угол наклона луча к оптической оси уменьшается.

Амичи для получения большего увеличения и дальнейшего уменьшения углов наклона лучей к оптической оси предложил помещать за фронтальной линзой вогнуто-выпуклую линзу. Точка P' должна находиться в центре кривизны вогнутой поверхности линзы. По отношению к преломлению на этой поверхности P' будет апланатической точкой, совпадающей со своей сопряженной точкой. Точка P' должна одновременно находиться на расстоянии R_1/n_1 от центра кривизны выпуклой поверхности второй линзы (n_1 — показатель преломления этой линзы, R_1 — радиус кривизны ее выпуклой поверхности). Тогда по отношению к преломлению на этой поверхности P' будет апланатической точкой; ее изображение получится в сопряженной апланатической точке P'' .

Применив метод Амичи несколько раз, можно добиться какого угодно уменьшения углов наклона лучей к оптической оси. При этом для всей системы в целом будет выполнено условие синусов. Метод Амичи часто применяют при конструкции объективов микроскопов. Однако таким методом конструируются в лучшем случае первые две линзы, так как иначе возникает сильная, ничем не компенсируемая хроматическая аберрация.

Б. Аббе принадлежит простой способ испытания объективов на выполнение условия синусов. Допустим, что во второй апланатической точке объектива P' (рис. 69) помещена малая диафрагма, через которую производится наблюдение. Ее сильно уменьшенное изображение, получающееся в сопряженной апланатической точке P , будет входным зрачком системы. Рассмотрим изображение конечного участка плоскости AB , даваемое объективом, когда расстояние q этой плоскости от точки P очень велико по сравнению с диаметром входного зрачка. Так как при перемещении объекта влево от апланатической точки P его изображение перемещается также влево (см. § 11, пункт 6), то изображение плоскости AB получится левее второй апланатической точки P' . Когда расстояние q достаточно велико, то изображение $A'B'$ плоскости AB можно увидеть невооруженным глазом, если смотреть через диафрагму. Изображение получится сильно искаженным из-за использования косых пучков лучей, наклоненных под большими углами к главной оптической оси. Однако, ввиду исключительной малости входного зрачка, в разложении аберраций в степенные ряды можно пренебречь всеми степенями радиуса входного зрачка σ , сохранив лишь член нулевой степени,

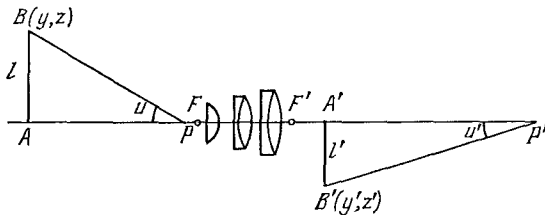


Рис. 69.

не содержащий σ . Иными словами, достаточно ограничиться учетом *одной только дисторсии*. В этом приближении изображение $A'B'$ будет расположено в плоскости параксиальных изображений.

Поставим задачу найти в предметной плоскости AB такое семейство кривых, чтобы его изображение в плоскости $A'B'$ получилось в форме квадратной сетки.

Возьмем в предметной плоскости произвольную точку B с координатами y, z на расстоянии $\sqrt{y^2 + z^2}$ от главной оптической оси. Проведем луч BP через центр входного зрачка. Сопряженный луч $B'P'$ однозначно определится условием синусов $\sin u' / \sin u = A$, где $A = n / (n'l')$, т. е. для рассматриваемого объектива A — величина постоянная, u и u' — углы наклона падающего и прошедшего лучей к главной оптической оси. Положение изображения B' определится точкой пересечения луча $B'P'$ с плоскостью параксиальных изображений. Подставим вместо $\sin u$ и $\sin u'$ их значения

$$\sin u = \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{q^2 + y^2 + z^2}}, \quad \sin u' = \sqrt{\frac{y'^2 + z'^2}{q'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

где q' — расстояние плоскости $A'B'$ от апланатической точки P' . Учтем при этом, что точки B и B' лежат в одной плоскости, проходящей через главную оптическую ось, так что $z'/y' = z/y$. Тогда получим

$$[A^2 q'^2 - (1 - A^2) y'^2] y^2 - y'^2 (1 - A^2) z^2 = q^2 y'^2.$$

Возьмем теперь в плоскости $A'B'$ семейство прямых, параллельных оси Z : $y' = C$, где C — параметр, который может принимать произвольные значения. Уравнение кривых в предметной плоскости AB , изображением которых является это семейство, найдется из предыдущего соотношения, если в нем y' заменить на C . Таким

путем получим

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (18.2)$$

где

$$a^2 = \frac{q^2 \omega^2}{1 - (1 - A^2) \omega^2}, \quad b^2 = \frac{q^2}{1 - A^2}, \quad (18.3)$$

а ω — новый параметр, связанный с параметром C соотношением

$$\omega = C/Aq'. \quad (18.4)$$

Для объективов микроскопов всегда $A^2 < 1$, так что при $\omega^2 < 1/(1 - A^2)$ величина a существенно положительна. В этом случае (18.2) представляет семейство гипербол, осью которого является координатная ось Y . При $\omega = 0$ уравнение (18.2) переходит в $y^2 = 0$ и изображает ось Z . Значения $\omega^2 > 1/(1 - A^2)$ надо исключить, так как в этом случае уравнение (18.2) представляет семейство мнимых эллипсов и никакого оптического изображения не получается. Аналогично, семейство прямых $z' = C$ при тех же значениях параметра ω является оптическим изображением семейства гипербол

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (18.5)$$

получающегося из семейства (18.2) поворотом на 90° вокруг начала координат O . Оба семейства гипербол (18.2) и (18.5) пересекаются между собой, образуя криволинейную сетку, представленную на рис. 70. При переходе от одной гиперболы к соседней параметр ω должен получать одинаковые приращения. Тогда и приращения параметра C , как это видно из (18.4), также будут одинаковыми. Следовательно, если рис. 70 поместить на расстоянии q перед передней апланатической точкой P , то гиперболы изобразятся в виде квадратной сетки прямых. При $\omega^2 = 1/2(1 - A^2)$ уравнение (18.2) переходит в

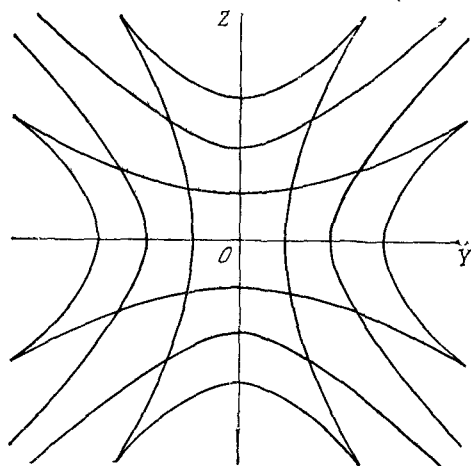


Рис. 70.

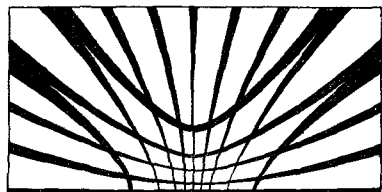


Рис. 71.

$y^2 - z^2 = b^2$, а уравнение (18.5) — в $z^2 - y^2 = b^2$. Обе эти гиперболы имеют асимптотами биссектрисы координатных углов. Следовательно, b есть расстояние от начала координат до вершины той из гипербол, асимптоты которой совпадают с биссектрисами координатных углов. Для объективов микроскопов A — величина малая, квадратом которой по сравнению с единицей можно пренебречь. В этом приближении $b = q$. Это дает простой способ определения расстояния q , на котором следует поместить рис. 70, чтобы его изображение получилось в виде квадратной сетки.

Теперь становится понятным метод Аббе испытанья объективов микроскопов на выполнение условия синусов. Аббе пользовался шаблоном, воспроизведенным на рис. 71. Удалив окуляр микроскопа, следует поместить такой шаблон на расстоянии q перед передней апланатической точкой. Глаз наблюдателя помещается во вторую апланатическую точку. Зрачок глаза играет роль выходного, а его изображение, даваемое объективом, — входного зрачка системы. Если изображение шаблона получается в виде сетки квадратов, то объектив удовлетворяет условию синусов. Если изображение получается слишком мелким, то можно применить вспомогательный микроскоп небольшого увеличения, перед объективом которого помещена малая диафрагма, расположенная во второй апланатической точке P' . При испытании описанным способом большого числа объективов микроскопов, ранее изготовленных лучшими мастерами без всяких расчетов путем последовательных проб и подбора линз, Аббе обнаружил, что все хорошие объективы всегда удовлетворяли условию синусов.

§ 19. Теорема косинусов. Стигматические изображения широкими пучками лучей

1. Обобщим результаты предыдущего параграфа на случай произвольных оптических систем. Среды, в которых распространяются световые лучи, здесь предполагаются изотропными, но могут быть неоднородными. Таким образом, в общем случае световые лучи будут криволинейными. Пусть P и P' — две точки с радиусами-векторами r и r' , лежащие на одном луче. Оптическая длина луча, соединяющего эти точки, рассматриваемая как функция их координат, называется *точечным эйконалом*, или *характеристической функцией оптической системы*. Она была введена Гамильтоном (1805—1865) и оказалась весьма полезной при исследовании оптических изображений. Характеристическую функцию будем обозначать через $H = H(r, r')$.

Фиксировав положение начальной точки P , будем перемещать конечную точку P' . Вместе с точкой P' будет перемещаться и луч PP' , соединяющий ее с точкой P . В результате получится пучок лучей, исходящих в различных направлениях из точки P , как если бы она была источником света (рис. 72). Пусть $F'F'$ — волновой фронт, соответствующий этому пучку, проходящий через начальное положение точки P' . При смещении P' в точку Q' , лежащую на луче $PA'Q'$, функция H получает приращение $\Delta H = (PA'Q') - (PP')$, или, ввиду равенства оптических длин PP' и PA' ,

$$\Delta H = (PA'Q') - (PA') = (A'Q').$$

Если смещение $dr' = \overline{P'Q'}$ бесконечно мало, то ΔH переходит в

$$dH = n' | dr' | \cos \alpha' = n' (s' dr'),$$

где α' — угол между вектором dr' и единичным вектором луча s' в точке P' , а n' — показатель преломления среды в этой точке. Аналогично найдется бесконечно малое приращение функции H , когда конечная точка P' остается неподвижной, а начальная точка P перемещается на dr . В этом случае при вычислении надо воспользоваться пучком лучей, сходящихся в точке P' (рис. 73). В результате получится $dH = -n (s dr)$, где n , s и dr имеют такой же смысл, что и в предыдущем случае, но относятся к начальной точке P . При изменении обоих

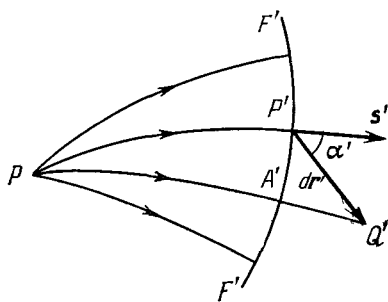


Рис. 72.