

Из доказанного следует, что отрезки dl_1 и dl_2 изображаются оптической системой с одинаковым увеличением. Следовательно, в рассматриваемом случае в формулах (19.6) $A = B$, т. е. увеличение любого отрезка в плоскости предмета не зависит от его направления. Отсюда следует, что изображение происходит с сохранением подобия, т. е. является *конформным*.

Но изображение с сохранением подобия характеризуется также сохранением углов. Следовательно, $\alpha = \alpha'$, и формула (19.8) дает $n dl = n' dl'$. Вообще, для всякого отрезка dl , лежащего в плоскости предмета, $n dl = n' dl'$, $dl'/dl = = n/n'$, и вторая часть теоремы доказана.

Итак, *стигматические изображения площадок, тангенциально лежащих в поле инструмента, могут происходить только с вполне определенным увеличением n/n'* . В частности, когда показатели преломления пространств предметов и изображений одинаковы, увеличение равно единице. Это утверждение перестает быть справедливым для площадок, не лежащих тангенциально в поле инструмента.

Примером может служить преломление на сферической поверхности (рис. 67). Сфера S отображается на сферу S' стигматически широкими пучками лучей. Однако линейное увеличение, как видно из построения, равно отношению квадратов показателей преломления, а не их первых степеней. Причина этого в том, что ни одна из сфер S и S' не лежит тангенциально в поле инструмента. Напротив, если линейный объект поместить в точку O , то, поскольку последняя является парой совпадающих узловых точек, линейное увеличение будет равно просто отношению показателей преломления в согласии с обсуждаемой нами общей теоремой. Действительно, ввиду шаровой симметрии любой линейный объект, помещенный в центре O , лежит тангенциально в поле инструмента.

Бесконечно малую часть конечной поверхности можно рассматривать как бесконечно малую плоскую площадку. Поэтому для стигматического изображения конечной поверхности необходимо и достаточно, чтобы стигматически изображались все бесконечно малые площадки, на которые можно разбить эту поверхность.

5. Рассмотрим, наконец, стигматические изображения объемных объектов широкими пучками лучей. Этот вопрос может быть исследован в точности так же, как и аналогичный вопрос для поверхностных объектов. В частности, может быть доказана следующая теорема:

Пусть точка P' является стигматическим изображением точки P . Для того чтобы бесконечно малый элемент объема в окрестности точки P изображался стигматически, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие теоремы косинусов для трех бесконечно малых отрезков, проходящих через точку P и не лежащих в одной плоскости.

Новым по сравнению с изображениями элементов поверхностей является то, что в случае стигматического изображения элементов объема всегда существуют три отрезка dl_1, dl_2, dl_3 , не находящиеся в одной плоскости и лежащие тангенциально в поле инструмента. Поэтому, повторяя рассуждения, приведенные применительно к изображениям элементов поверхности, приходим к заключению, что эти три отрезка изображаются с одним и тем же увеличением. Как следствие этого, получаем следующую теорему:

Стигматическое изображение элементов объема, если оно осуществляется широкими пучками лучей, всегда конформно, т. е. происходит с сохранением подобия. При этом линейное увеличение равно n/n' , так что оптическая длина предмета всегда равна оптической длине изображения.

§ 20. Об абсолютных оптических инструментах

1. С точки зрения геометрической оптики идеалом был бы оптический инструмент, изображающий стигматически широкими пучками лучей каждую точку пространства предметов в виде точки пространства изображений. Такой инструмент называется *абсолютным*. Обсудим вопрос о принципиальной возможности абсолютных оптических инструментов и исследуем их свойства.

Как доказано в предыдущем параграфе, изображения бесконечно малых объектов, даваемые абсолютным оптическим инструментом, всегда *конформны*. При этом оптическая длина любой линии равна оптической длине ее изображения. Отсюда следует, что в абсолютном оптическом инструменте оптическая длина луча между двумя сопряженными точками одинакова для всех пар сопряженных точек. Это положение называется *теоремой Каратеодори*.

Для доказательства возьмем две пары сопряженных точек: P, P' и Q, Q' (рис. 76). Через точку P проведем пучок лучей во всевозможных направлениях. Все эти лучи пересекутся в точке P' . Один из них пройдет через точку Q . Возьмем другой произвольный луч PAP' . В силу свойства сопряженных точек $(PAP') = (PQP')$. Луч PQP' , поскольку он проходит через точку Q , должен пройти и через сопряженную ей точку Q' . При этом кривая $P'Q'$ будет оптическим изображением кривой PQ , а потому $(PQ) = (P'Q')$. Отсюда следует $(QP'Q') = (PQP')$. Сравнивая это равенство с предыдущим, получаем: $(PAP') = (QP'Q')$, что и требовалось доказать.

2. Допустим теперь, что пространства предметов и изображений *однородны*, т. е. показатели преломления n и n' не зависят от координат. В этом случае любая прямая пространства предметов изобразится абсолютным инструментом в виде прямой пространства изображений. В самом деле, проведем через произвольную точку O пространства предметов три луча, лежащих в поле инструмента и не находящихся в одной плоскости. В пространстве изображений сопряженные с ними лучи пересекутся в сопряженной точке O' . Примем эти лучи за координатные оси в пространствах предметов и изображений. Ясно, что координатные оси одной координатной системы будут изображаться координатными осями другой координатной системы. При этом без потери общности можно принять, что одноименные оси являются сопряженными. Так как изображение происходит с постоянным увеличением n/n' , то при надлежащем выборе положительных направлений координатных осей координаты сопряженных точек будут связаны соотношениями

$$x' = \frac{n}{n'} x, \quad y' = \frac{n}{n'} y, \quad z' = \frac{n}{n'} z, \quad (20.1)$$

справедливыми для всех точек пространства предметов и пространства изображений, а не только для окрестностей сопряженных точек O и O' . Из них непосредственно следует, что любая прямая изображается прямой. Таким образом, при постоянных n и n' абсолютный инструмент является *телескопической системой*.

Докажем теперь, что при постоянных n и n' абсолютный оптический инструмент возможен только при $n = n'$. Для доказательства заметим, что линейное увеличение n/n' не зависит от положения объекта. Чтобы определить это увеличение, поместим бесконечно малый объект тангенциально на границе раздела сред. Тогда его изображение, возникающее как при преломлении, так и при отражении, совместится с самим объектом. Отсюда следует, что $n/n' = 1$, и наше утверждение доказано. Таким образом, показатели преломления сред должны быть одинаковы, и никакого преломления не будет.

Остается исследовать только отражение. По теореме Каратеодори оптическая длина луча между сопряженными точками не зависит от положения объекта. Поместим точечный объект на границе раздела сред. Его изображение получится в той же точке. Поэтому оптическая длина луча между объектом и его изображением должна равняться нулю, независимо от положения объекта. При преломлении, когда оптические длины лучей на всех участках сохраняют знаки, это было бы возможно только тогда, когда изображение совпадает с самим объектом. Но в этом случае, как мы видели, никакого преломления нет, и об изображении можно говорить лишь условно. Однако при отражении, если изображение получается мнимым, оптические длины лучей на разных участках могут иметь противоположные знаки. Тогда возможен и нетривиальный случай, когда объект и его изображение находятся в разных местах, хотя оптические длины лучей

между ними и обращаются в нуль. При этом формулы (20.1) переходят в

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (20.2)$$

Такой случай осуществляется в плоском зеркале или в системе плоских зеркал. Это единственный абсолютный оптический инструмент, возможный при постоянных n и n' .

3. *Нетривиальные абсолютные оптические инструменты, дающие изображения с увеличением, отличным от единицы, возможны только с использованием неоднородных сред и криволинейных лучей.* Первый пример такого инструмента был приведен Максвеллом. В дальнейшем были приведены и другие примеры. Максвелл назвал свой инструмент «рыбьим глазом», хотя никакого сходства с глазом рыбы у него нет. Более того, «рыбий глаз» Максвелла вообще трудно назвать инструментом в обычном смысле этого слова. Действительно, он представляет собой неограниченную неоднородную среду, показатель преломления которой меняется в пространстве таким образом, что любой луч в этой среде имеет форму окружности. К идее «рыбьего глаза» естественнее всего прийти с помощью геометрического построения, называемого *стереографической проекцией*.

Такая проекция осуществляется следующим образом. Возьмем сферу S , через центр которой проведем координатную плоскость XU (рис. 77). Пусть N — точка пересечения этой сферы с осью Z . Соединим точку N с каждой точкой

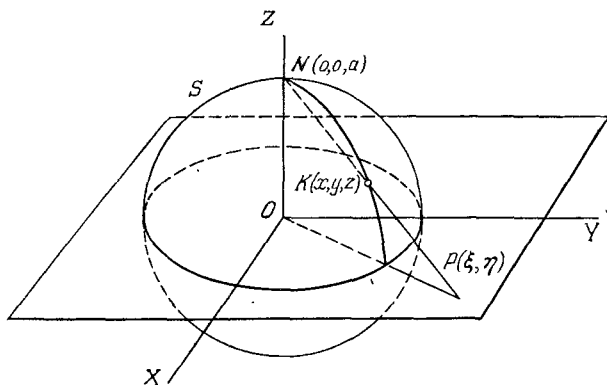


Рис. 77.

K сферы прямой NK и продолжим эту прямую до пересечения с плоскостью XU в точке P . Точка P и называется *стереографической проекцией* точки K на плоскость XU . Легко показать, что координаты x, y, z точки K связаны с координатами ξ, η соотношениями

$$\xi = a \frac{x}{a-z}, \quad \eta = a \frac{y}{a-z}, \quad (20.3)$$

$$x = 2a^2 \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + a^2}, \quad y = 2a^2 \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + a^2}, \quad z = a \frac{\xi^2 + \eta^2 - a^2}{\xi^2 + \eta^2 + a^2}, \quad (20.4)$$

где a — радиус сферы S .

Каждая окружность сферы S при стереографической проекции преобразуется в окружность плоскости XU и обратно. В самом деле, плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ пересекает сферу S по окружности. Если в уравнение этой плоскости подставить значения координат (20.4), то получится уравнение второй степени, в котором будет отсутствовать член с произведением $\xi\eta$, а квад-

раты ξ^2 и η^2 войдут только в комбинации $\xi^2 + \eta^2$. Такое уравнение есть уравнение окружности.

Пусть $d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ — элемент длины на сфере S . При стереографической проекции он отобразится элементом длины $ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ на плоскости XU . Пользуясь формулами (20.4), нетрудно показать, что эти элементы связаны соотношением

$$d\sigma = \frac{2}{1 + (r/a)^2} ds, \quad (20.5)$$

где $r^2 = \xi^2 + \eta^2$. Кривая кратчайшей длины, проведенная на какой-либо поверхности между двумя точками, называется *геодезической линией* этой поверхности. Для сферы геодезическими линиями являются дуги больших кругов. Возьмем на сфере S любые диаметрально противоположные точки $K(x_0, y_0, z_0)$ и $K'(-x_0, -y_0, -z_0)$. Пусть P и P' — их стереографические проекции на плоскость XU . Через прямую, соединяющую точки K и K' , можно провести бесконечное множество плоскостей, пересекающих сферу S вдоль больших кругов, проходящих через эти точки. При стереографической проекции эти большие круги изобразятся окружностями, соединяющими точки P и P' (рис. 78). Вдоль всех этих окружностей интеграл $\int ds/(1 + r^2/a^2)$ принимает одно и то же значение, как это непосредственно видно из соотношения (20.5).

Вообразим теперь сферически симметричную среду с центром в начале координат O , показатель преломления которой определяется выражением

$$n = \frac{n_0}{1 + r^2/a^2}, \quad (20.6)$$

где n_0 — постоянная, а r — расстояние от начала координат. Тогда оптические длины всех окружностей между точками P и P' , изображенных на рис. 78, будут одинаковыми. Отсюда следует, что все эти окружности будут совпадать со световыми лучами, исходящими из точки P и сходящимися в точке P' . Одна из этих окружностей вырождается в прямую, соединяющую точки P и P' . Она получается в результате стереографической проекции большого круга, лежащего в плоскости NKK' . Начало координат O лежит в той же плоскости, а следовательно, и на прямой PP' . Вообще говоря, его положение не совпадает с серединой отрезка PP' . Исключение составляет только случай, когда диаметрально противоположные точки K и K' сферы S лежат в координатной плоскости XU . В этом случае большой круг, лежащий в той же плоскости, совпадает со своей стереографической проекцией, а потому радиус кривизны светового луча будет равен радиусу сферы S , т. е. a .

Ввиду шаровой симметрии все плоскости, проходящие через центр O , эквивалентны. Поэтому луч, исходящий из точки P , пройдет через сопряженную точку P' , независимо от того, лежит он в координатной плоскости XU или не лежит. Кроме того, приведенные нами рассуждения применимы для любой пары диаметрально противоположных точек K и K' и соответствующей им пары сопряженных точек P и P' .

Таким образом, получается следующий результат. Все лучи, выходящие из любой точки среды P , описав окружности, собираются в другой точке P' ,

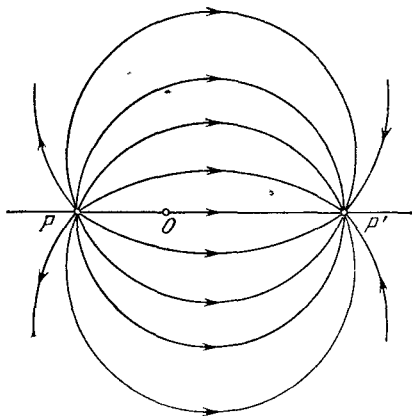


Рис. 78.

т. е. точка P' является стигматическим изображением точки P в широких пучках лучей. Иными словами, среда с показателем преломления (20.6) обладает свойствами абсолютного оптического инструмента. Она и была названа Максвеллом «рыбьим глазом».

§ 21. Глаз и зрение

1. На рис. 79 приведен горизонтальный разрез правого глаза человека (вид сверху). Глазное яблоко заключено в плотную белую непрозрачную оболочку w , называемую *склерой*. Через заднюю стенку склеры проходит глазной нерв e и кровеносные сосуды. Передняя часть склеры переходит в прозрачную *роговую оболочку*, или *роговицу* h , более выпуклую, чем склера. Толщина склеры от

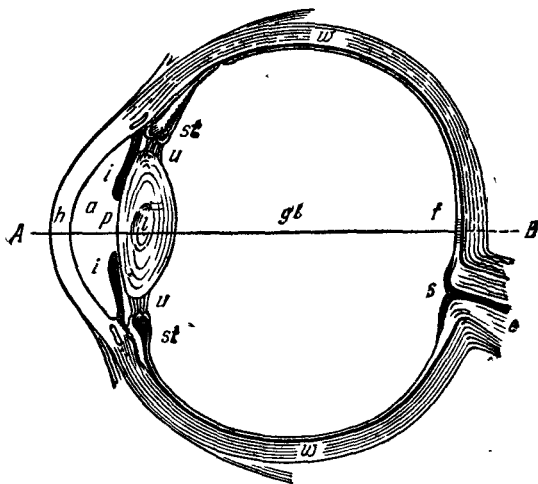


Рис. 79.

0,4 до 1,1 мм, роговицы — около 0,5 мм. За роговицей следуют *передняя глазная камера* a , *хрусталик* l , *задняя глазная камера* gl . Эти части вместе с роговицей составляют *оптическую систему глаза*, дающую при преломлении лучей оптические изображения предметов. Толщина передней глазной камеры, а также хрусталика около 3,6 мм. Передняя глазная камера заполнена прозрачной жидкостью, называемой *водянистой влагой*, задняя — прозрачным студенистым веществом, называемым *стекловидным телом*. Показатели преломления обеих этих сред практически одинаковы и равны 1,336. Показатель преломления роговой оболочки 1,376.

Внутренняя поверхность склеры покрыта *сосудистой оболочкой* (толщиной около 0,4 мм), содержащей разветвления кровеносных сосудов, питающих глаз. Спереди она переходит в утолщенную часть