

В. С какой относительной точностью будет выполняться закон обратных квадратов, если диск рассматривать как точечный источник света, помещенный в его центре?

Ответ. $E = \pi B a^2 / (R^2 + a^2)$. Если $a/R \ll 1$, то

$$E \approx \frac{\pi B a^2}{R^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} \right).$$

Закон обратных квадратов выполняется с относительной точностью $a^2/(2R^2)$. При $a/R \sim 1/10$ эта точность будет около 1%.

5. Предполагая, что излучение Солнца подчиняется закону Ламберта, определить его поверхностную яркость B при наблюдении с поверхности Земли (т. е. с учетом поглощения и рассеяния света земной атмосферой), если освещенность поверхности Земли, создаваемая солнечными лучами при перпендикулярном падении в тех же условиях, $E \approx 10^5$ лк. Средний телесный угол, под которым солнечный диск виден с Земли, $\Omega = 6,8 \cdot 10^{-5}$ ср.

Ответ. $B = E/\Omega \approx 1,5 \cdot 10^9$ кд/м².

§ 23. Яркость и освещенность оптического изображения. Нормальное увеличение

1. Во всех дальнейших расчетах, если нет специальной оговорки, не будем учитывать потери света при отражении на границах линз, призм и других отражающих поверхностях. Будем также пренебрегать поглощением и рассеянием света. Потери света на отражение

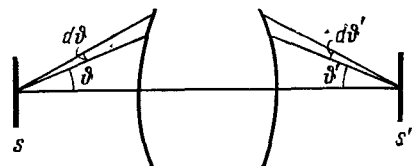


Рис. 89а.

довольно значительны. Так, для призматического бинокля они составляют около 50% (см. § 67). С учетом всех этих потерь яркость и освещенность изображения получились бы несколько меньше вычисленных. Сначала рассмотрим случай, когда размеры предмета заметно превосходят предел разрешения оптической системы. Тогда система дает геометрически подобные изображения, и можно ограничиться точностью геометрической оптики.

Допустим, что предмет помещен на главной оптической оси центрированной системы и имеет форму малой площадки s , перпендикулярной к этой оси (рис. 89а). Изображением площадки s будет какая-то другая площадка s' . Обозначим через B_θ яркость площадки s под углом θ к ее нормали, или (что то же) к главной оптической оси системы. Соответствующую яркость изображения обозначим через $B'_{\theta'}$. Соответствие означает, что угол θ , составляемый падающим лучом с оптической осью системы, после выхода из нее переходит в θ' . Будем предполагать, что в образовании изображения участвуют не только параксиальные, но и широкие пучки лучей, так что должно выполняться условие синусов (18.1). Из него следует

$$s n^2 \sin^2 \theta = s' n'^2 \sin^2 \theta'. \quad (23.1)$$

Если условие синусов не выполняется, то все результаты, получаемые ниже, также сохраняют силу, но только для параксиальных лучей. Возьмем теперь два конуса с общей вершиной на площадке s , образующие которых составляют с главной оптической осью углы ϑ и $\vartheta + d\vartheta$. (На рис. 89а указаны только сечения этих конусов плоскостью рисунка.) Величина телесного угла, заключенного между этими конусами, будет $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$. Световой поток, посылаемый площадкой s внутрь телесного угла $d\Omega$, равен

$$d\Phi = B_{\vartheta} s \cos \vartheta d\Omega = 2\pi B_{\vartheta} s \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta.$$

В пространстве изображений световой поток $d\Phi$ перейдет в поток

$$d\Phi' = 2\pi B'_{\vartheta'} s' \sin \vartheta' \cos \vartheta' d\vartheta',$$

пронизывающий площадку s' . При отсутствии потерь света $d\Phi = d\Phi'$, т. е.

$$B_{\vartheta} s \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = B'_{\vartheta'} s' \sin \vartheta' \cos \vartheta' d\vartheta'.$$

Учтем теперь соотношение (23.1), дифференцирование которого дает

$$sn^2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = s'n'^2 \sin \vartheta' \cos \vartheta' d\vartheta'.$$

В результате получим

$$\frac{B_{\vartheta}}{n^2} = \frac{B'_{\vartheta'}}{n'^2}, \quad (23.2)$$

чем и определяется яркость изображения. Если показатели преломления пространств предметов и изображений одинаковы ($n = n'$), то $B'_{\vartheta'} = B_{\vartheta}$, т. е. яркость изображения равна яркости предмета. Как видно из вывода, одинаковость яркостей обусловлена тем, что увеличение площади изображения сопровождается уменьшением в такое же число раз телесного угла, в котором распространяется световой поток. Для источников света, подчиняющихся закону Ламберта, B_{ϑ} не зависит от угла ϑ . В этом случае нет смысла сохранять индексы ϑ и ϑ' , так что можно написать

$$B' = (n'/n)^2 B. \quad (23.3)$$

2. Иначе ведет себя освещенность изображения, проектирующегося на экран. В этом случае величина телесного угла, в котором распространяются лучи после выхода из оптического прибора, не играет роли. Существенны только площади изображения и полный световой поток, концентрирующийся на этой площади. При неизменном световом потоке освещенность будет тем больше, чем меньше площадь изображения.

При количественном исследовании этого вопроса будем предполагать, что изображаемая площадка s имеет форму диска, плоскость которого перпендикулярна к главной оптической оси, и излучает свет по закону Ламберта. Если бы оптического прибора не было, то

освещенность экрана, согласно формуле (22.11), была бы равна $E_0 = \pi B \sin^2 \theta$, где 2θ — угол зрения, т. е. угол между лучами, исходящими из диаметрально противоположных точек площадки s и направленными к центру площадки s' . При наличии оптического прибора угол схождения крайних лучей с вершиной на площадке s' меняется и становится равным $2\theta'$. Это есть угол между крайними лучами, идущими к центру площадки s' от диаметрально противоположных точек выходного зрачка прибора. Полный световой поток через площадку s' , как было показано выше, представляется интегралом

$$\Phi' = 2\pi B's' \int \sin \vartheta' \cos \vartheta' d\vartheta' = \pi B's' \sin^2 \theta',$$

а освещенность площадки s' будет Φ'/s' , т. е.

$$E = \pi B' \sin^2 \theta' = \pi B \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \sin^2 \theta'. \quad (23.4)$$

Если $n = n'$, то

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{\sin \theta'}{\sin \theta}\right)^2. \quad (23.5)$$

Эта формула показывает, что влияние оптического прибора на освещенность изображения сводится к изменению угла между крайними лучами, исходящими из противоположных точек предмета. Например, действие лупы как зажигательного стекла (в отсутствие потерь света) эквивалентно приближению источника (Солнца) на такое расстояние, чтобы он был виден невооруженным глазом под тем же углом зрения, как и входной зрачок (свободное отверстие) лупы из ее главного фокуса.

Если изображение получается в главной фокальной плоскости объектива (как в фотоаппарате), то в параксиальном приближении $\sin \theta' = D'/(2f')$, где D' — диаметр выходного зрачка, а f' — заднее фокусное расстояние объектива. Освещенность изображения будет пропорциональна квадрату этого отношения, а с ним и отношения D/f' , где D — диаметр входного зрачка. Отношение D/f' называется *относительным отверстием*, а его квадрат $(D/f')^2$, определяющий освещенность изображения, — *светосилой объектива*.

В иммерсионных микроскопах (см. § 18, пункт 4) свет от конденсора, помещенного перед объективом, попадает в пространство, заполненное жидкостью (иммерсией) с показателем преломления n , в которой помещается предмет. Пусть $2\theta_0$ — угол (апертура) между крайними направлениями лучей в конденсоре, которые попадают в микроскоп. Так как сам конденсор находится в воздухе, то по закону преломления $\sin \theta_0 = n \sin \theta$. Световой поток пропорционален $\sin^2 \theta_0$, т. е. $(n \sin \theta)^2$. При одной и той же апертуре 2θ световой поток, попадающий в объектив, а с ним и освещенность изображения пропорциональны квадрату показателя преломления n .

Величину $n \sin \theta$, следуя Аббе, называют *числовой апертурой*. Таким образом, применение иммерсии увеличивает освещенность изображения. Так как, однако, окончательное изображение получается в воздухе, то и при наличии иммерсии его яркость может быть самое большее равна яркости источника света.

3. Перейдем теперь к зрительной оценке поверхностной яркости предметов, т. е. оценке при наблюдении их глазом.

Отдельные элементы сетчатки — колбочки и группы палочек, соединенные с одним и тем же волокном зрительного нерва, — реагируют на световое раздражение независимо друг от друга. Увеличение освещаемой поверхности сетчатки при сохранении неизменной ее освещенности не усиливает интенсивности светового раздражения отдельного элемента, а увеличивает лишь число освещенных элементов. Если отвлечься от трудно поддающихся учету различных физиологических и психологических факторов, с которыми связаны, например, многочисленные обманы зрения, то следует сказать, что глаз судит о яркости предмета не по общему световому потоку, попадающему в него, а прежде всего по потоку, приходящемуся на единицу площади сетчатки, т. е. по *освещенности* последней. Поэтому, если исключить все субъективные факторы, то вопрос о зрительной оценке яркости сведется к вопросу об освещенности сетчатки.

Освещенность сетчатки невооруженного глаза называется *естественной освещенностью*. Она найдется по формуле (23.4), в которой следует положить $n = 1$, если, как это обычно и бывает, рассматриваемый предмет находится в воздухе. Таким образом,

$$E = \pi B (n' \sin \theta')^2. \quad (23.6)$$

Угол θ' есть угол, под которым из заднего фокуса глаза виден диаметр его выходного зрачка. В формулу (23.6) совсем не входит расстояние до предмета. *При неизменном зрачке глаза освещенность сетчатки E не зависит от этого расстояния, а определяется только поверхностной яркостью предмета.* Вот почему одинаковые фонари, находящиеся на разных расстояниях от нас, кажутся нам одинаково яркими (если, конечно, пренебрежимо малы потери света при распространении его от фонаря до глаза).

Допустим теперь, что глаз вооружен, т. е. наблюдение ведется через зрительную трубу (телескоп) или микроскоп. В этом случае оптический прибор и глаз следует рассматривать как единую оптическую систему, к которой применимы формулы (23.5) и (23.6). Однако величина угла θ' может измениться. Смотреть в оптический прибор следует так, чтобы плоскость выходного зрачка прибора совмещалась с плоскостью входного зрачка глаза. Только тогда поле зрения будет резко очерчено. Угол θ' определяется тем из зрачков, который сильнее диафрагмирует световые лучи. Если входной зрачок глаза меньше выходного зрачка прибора, то угол θ'

определяется зрачком глаза. В этом случае получается естественная освещенность сетчатки, т. е. сетчатка будет освещена так же, как и при отсутствии прибора (если, конечно, пренебречь дополнительными потерями света, вносимыми оптическим прибором). Если же входной зрачок глаза больше выходного зрачка прибора, то угол θ' определится зрачком прибора. В этом случае освещенность сетчатки будет меньше естественной. Будем непрерывно увеличивать выходной зрачок прибора, начиная с очень малых размеров. Сначала освещенность сетчатки будет возрастать пропорционально площади выходного (а, следовательно, и входного) зрачка (в параксиальном приближении). Когда выходной зрачок прибора сделается равным входному зрачку глаза, освещенность E достигнет максимума, а затем будет оставаться постоянной.

4. Изложенными соображениями руководствуются при выборе рационального увеличения зрительных труб, телескопов, биноклей и микроскопов. *Нормальным* или *равнозрачковым* увеличением таких приборов называют такое увеличение, когда выходной зрачок прибора равен входному зрачку глаза.

В телескопе, как и во всякой зрительной трубе, апертурной диафрагмой и входным зрачком служит свободное отверстие объектива. Объектив дает изображение в своей задней фокальной плоскости, которая одновременно является передней фокальной плоскостью окуляра. При этом условии изображение в телескопе получается на бесконечности, и его отчетливо будет видеть нормальный глаз в ненапряженном состоянии. Все параллельные пучки лучей после прохождения через телескоп остаются параллельными, т. е. телескоп является телескопической оптической системой. Меняется только ширина пучков. Если падающие лучи параллельны главной оптической оси, то ширина пучка равна диаметру объектива D . Увеличение телескопа N есть отношение угла, под которым виден малый предмет в телескоп, к углу, под которым он был бы виден, если бы рассматривался невооруженным глазом. Как было показано в § 11 (пункт 10), для телескопических систем такое увеличение равно отношению ширины падающего пучка параллельных лучей к ширине выходящего пучка. В телескопе ширина выходящего пучка равна диаметру выходного зрачка D' . При нормальном увеличении $D' = d$, где d — диаметр входного зрачка глаза. Таким образом, нормальное увеличение телескопа определяется выражением

$$N_{\text{норм}} = D/d. \quad (23.7)$$

Диаметр d зрачка глаза не остается постоянным, а зависит от яркости. Увеличение, равнозрачковое в дневных условиях, оказывается слишком большим при наблюдении в сумерки и ночью. В последних случаях требуются трубы с большим выходным зрачком, т. е. либо с малым увеличением, либо, что гораздо лучше, с большим объективом.

Освещенность изображения не зависит от увеличения, если оно меньше нормального. Увеличения меньше нормального нецелесообразны, так как при этом используется только центральная часть объектива; периферийные лучи, достаточно удаленные от оптической оси, задерживаются радужной оболочкой и не попадают в зрачок глаза. Нормальное увеличение есть максимальное увеличение, при котором освещенность изображения еще максимальна. При таком увеличении объектив используется полностью. Поэтому окуляры к зрительным трубам подбирают так, чтобы они давали нормальное увеличение.

В некоторых случаях имеет смысл применять увеличения, превосходящие нормальное в 2—4 раза, несмотря на то, что это связано с значительным уменьшением освещенности изображения (соответственно в 4—16 раз). Дело в том, что разрешаемый предел глаза 30—60" соответствует случаю, когда изображение получается на центральной ямке желтого пятна. На периферии разрешаемый предел больше. Он увеличивается также при длительной работе и усталости глаза. В этих условиях выгоднее пойти на некоторое уменьшение освещенности, чтобы получить большие увеличения и возможность различать более мелкие детали предметов. Однако далеко идти в этом направлении нецелесообразно из-за уменьшения освещенности и поля зрения.

При N -кратном увеличении угловые размеры поля зрения на местности уменьшаются в N , а его площадь в N^2 раз. Поэтому в биноклях предпочитают увеличение меньше нормального. Этим достигается большее поле зрения и облегчается нахождение нужного объекта на местности. Бинокли рассчитывают для сравнительно широких выходных зрачков (в пределах 3—5 мм). Так, полевые бинокли с диаметром объектива 3 см имеют 6- или 8-кратные увеличения (диаметр выходного зрачка соответственно 5 и 3,75 мм).

5. Зрительные трубы, как обнаружил еще М. В. Ломоносов (1711—1765), улучшают видимость изображений предметов при слабых освещенностях, например ночью. Конечно, освещенность изображений при этом не только не увеличивается, но даже уменьшается из-за неизбежных потерь света на отражение от поверхностей линз и поглощение в стекле. Однако при слабых освещенностях сильно уменьшается разрешающая способность глаза. Ночью, когда освещенность падает до десятитысячных долей люкса, угол, разрешаемый глазом, возрастает с $\sim 1'$ до $\sim 1^\circ$. Зрительные трубы увеличивают угол зрения, а потому их применение способствует различению контуров и крупных деталей предметов, даже если они неразличимы невооруженным глазом.

В трубах, предназначенных для ночных наблюдений, число линз должно быть минимальным, а сами линзы должны быть простыми, чтобы максимально уменьшить потери света на отражение. Увеличение трубы должно быть как можно ближе к нормальному, чтобы

использовать весь световой поток, падающий на объектив. Конечно, нормальное увеличение определяется размерами зрачка глаза в ночных условиях (6—8 мм).

6. Найдем теперь нормальное увеличение микроскопа. Увеличением микроскопа N называется отношение угла φ' , под которым виден малый объект в микроскоп, к углу φ , под которым он был бы виден невооруженным глазом, если бы был помещен от него на расстоянии ясного зрения L (см. § 21, пункт 3). Если y — линейный размер рассматриваемого объекта, то $\varphi = y/L$. Поместим этот объект $y = AB$ в передней апланатической точке объектива (рис. 896);

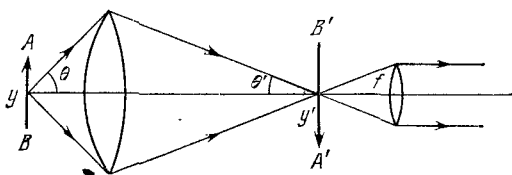


Рис. 896.

для упрощения рисунка сложные объектив и окуляр изображены тонкими линзами, это не отражается на общности выводов и результатов). Его изображение $A'B' = y'$ получится в задней апланатической точке. Так как угол θ' всегда мал, то его синус можно заменить самим углом, записав условие синусов в виде $ny \sin \theta = y' \theta'$. Так же, как и в телескопе, изображение y' должно получаться в передней фокальной плоскости окуляра. Если f — фокусное расстояние окуляра, то $2f\theta'$ будет шириной выходящего пучка лучей. При нормальном увеличении эта ширина должна быть равна диаметру d входного зрачка глаза, т. е.

$$d = 2f\theta' = 2 \frac{fny \sin \theta}{y'}$$

Но $y = L\varphi$, $y' = f\varphi'$, так что $y/y' = L\varphi/(f\varphi') = L/(Nf)$. Подставляя это в предыдущее соотношение, получим¹⁾

$$N_{\text{норм}} = 2Ln \frac{\sin \theta}{d}. \quad (23.8)$$

Нормальное увеличение для микроскопа еще в большей степени есть величина субъективная, чем для телескопа, так как оно зависит от двух параметров глаза: диаметра зрачка d и расстояния ясного

¹⁾ Очень часто при выводе формулы (23.8) вводят ненужное предположение, что изображение в микроскопе получается на расстоянии ясного зрения L от глаза. На самом деле это может быть и не так. Справедливость формулы (23.8) никак не связана с тем, на каком расстоянии от глаза получается изображение в микроскопе. Величина L входит в формулу (23.8) совсем по другой причине, как это видно из нашего вывода.

рения L . Характеризуя увеличение микроскопа, обычно полагают $d = 2$ мм, $L = 250$ мм. Для сухих систем ($n = 1$) верхний предел числовой апертуры $n \sin \theta$ составляет 1, для иммерсионных 1,5. Соответствующие нормальные увеличения будут $N = 250$ и $N = 375$. По тем же соображениям, что и для телескопа, от этих значений можно несколько отступить в большую сторону, но не более чем в 2—4 раза. Таким образом, в лучших безиммерсионных микроскопах верхний предел увеличения можно принять равным 1000, а в иммерсионных — 1500. Большие увеличения не только бесполезны, но и вредны. К этому вопросу, а также к вопросу об увеличении телескопа мы вернемся в § 56 и разберем его с новой точки зрения — в связи с разрешающей способностью этих приборов, определяемой волновой природой света.

7. В заключение рассмотрим случай, когда размеры объекта меньше предела разрешения оптической системы. Такой случай типичен при наблюдении звезд невооруженным глазом и в телескоп. В этом случае оптическое изображение не передает формы предмета, а представляет собой дифракционный кружок, окруженный темными и светлыми кольцами (см. рис. 180, стр. 300), причем почти весь свет сконцентрирован в центральном кружке. Назначение телескопа при наблюдении звезд состоит не в том, чтобы различать детали рассматриваемого объекта (они находятся за пределами его разрешающей способности), а в том, чтобы *увеличить световой поток*, попадающий в глаз наблюдателя, и тем самым обнаруживать все более и более слабые звезды.

Применять увеличение меньше нормального не имеет смысла, так как при этом будет использоваться не весь объектив. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться случаем, когда диаметр выходного зрачка телескопа D' меньше или равен диаметру входного зрачка глаза ($D' \leq d$). Тогда размер дифракционного кружка будет определяться величиной D' . Как будет показано в теории дифракции (см. § 55), диаметр дифракционного кружка будет обратно пропорционален D' , а его площадь обратно пропорциональна D'^2 . Световой поток, попадающий в глаз, $\Phi \sim D^2$, где D — диаметр объектива, а освещенность дифракционного кружка на сетчатке

$$E \sim \frac{D^2}{1/D'^2} = D^2 D'^2.$$

Вводя увеличение телескопа $N = D/D'$, получим

$$E \sim D^4/N^2.$$

Видимость звезды определяется не только освещенностью дифракционного кружка на сетчатке, но и освещенностью окружающего фона. Освещенность фона $E_{\text{фон}}$ определяется яркостью B неба. Ее можно найти по формуле (23.6), в которой под θ' теперь следует понимать угол, под которым из заднего фокуса глаза виден диаметр

D' выходного зрачка телескопа. Таким образом, $E_{\text{фон}} \sim BD'^2 = = BD^2/N^2$, и следовательно,

$$E/E_{\text{фон}} \sim BD^2. \quad (23.9)$$

Эта формула объясняет, почему в телескоп звезды видны и днем.

ЗАДАЧА

С помощью собирательной линзы можно зажечь папиросу, фокусируя на ней прямой солнечный свет. Можно ли, взяв линзу достаточных размеров (например, объектив большого астрономического телескопа), сделать то же самое, используя свет полной Луны?

Решение. Для простоты будем считать, что излучение Солнца подчиняется закону Ламберта. Прямые солнечные лучи, падающие на Землю перпендикулярно, создают на ней освещенность $E_C = \pi B \sin^2 \vartheta_C$, где B — поверхностная яркость Солнца, а ϑ_C — угловой размер его. Из повседневного опыта известно, что такой освещенности для воспламенения папиросы недостаточно. Средняя освещенность поверхности Земли будет в π раз меньше, т. е. $\bar{E}_C = = B \sin^2 \vartheta_C$. Если пренебречь поглощением и рассеянием света, то действие линзы сводится просто к увеличению видимых угловых размеров Солнца. Однако максимальная освещенность не может быть больше πB .

Так как диаметр лунной орбиты пренебрежимо мал по сравнению с расстоянием до Солнца, то средняя освещенность поверхности Луны будет такой же, как и у Земли, т. е. $\bar{E}_C = B \sin^2 \vartheta_C$. Если Луна как источник света подчиняется закону Ламберта, то ее поверхностная яркость будет $B \sin^2 \vartheta_C$. Лучи от Луны, падая на поверхность Земли перпендикулярно, создают освещенность $B \sin^2 \vartheta_C \sin^2 \vartheta_L$, где ϑ_L — угловой радиус Луны. Эта освещенность много меньше, чем $B \sin^2 \vartheta_C$. Поэтому, каковы бы ни были размеры линзы, с помощью лунного света воспламенить папиросу нельзя.

§ 24. Оптические инструменты

1. Лупа. Лупа, как и микроскоп, дает увеличенные изображения предметов, находящихся на небольших расстояниях от глаза. *Увеличение N лупы (и микроскопа) определяется как отношение угла, под которым виден (малый) предмет через лупу, к углу, под которым он был бы виден невооруженным глазом, если бы был помещен от глаза на расстоянии ясного зрения L (см. § 23, пункт 6).* Можно также сказать, что увеличение лупы (и микроскопа) есть отношение линейных размеров изображения предмета на сетчатке при рассматривании его в лупу к линейным размерам изображения того же предмета на сетчатке, когда он рассматривается невооруженным глазом с расстояния ясного зрения. При увеличениях, не превосходящих 5, в качестве лупы обычно применяется простая собирательная линза, при больших увеличениях — система, состоящая из таких линз.

При вычислении увеличения лупы будем для общности рассматривать ее как сложную центрированную систему и воспользуемся