

является наименее вредной, и существуют способы ее устранения. Соединение камеры Шмидта или менисковых систем Максудова с окуляром производится так же, как в телескопах Ньютона, Кассегрена и Грегори.

§ 25. Электрические и магнитные линзы

1. Допустим, что показатель преломления n меняется в пространстве непрерывно. Проведем поверхности равного показателя преломления и притом настолько часто, что показатели преломления между каждыми соседними поверхностями можно будет считать величинами постоянными. Тогда непрерывное изменение величины n заменится скачкообразным, происходящим на границах между слоями. Если среда обладает осевой симметрией, то эти границы будут поверхностями вращения, вершины которых лежат на оси симметрии системы. В малой окрестности вокруг оси симметрии их можно аппроксимировать сферами, центры которых также лежат на той же оси. Таким путем мы приходим к центрированной системе тонких сферических линз, у которой ось симметрии служит главной оптической осью и к которой применимы все результаты оптики параксиальных лучей. Увеличивая число слоев бесконечно и одновременно устремляя к нулю их толщины, мы восстановим в пределе первоначальное непрерывное распределение показателя преломления. Отсюда следует, что *осесимметричную среду с непрерывно изменяющимся в пространстве показателем преломления можно рассматривать как предельный случай центрированной системы линз и применять к ней законы и методы оптики параксиальных лучей. Такая среда обладает способностью давать оптические изображения.*

Оптические системы с непрерывно изменяющимися показателями преломления принципиально возможны, но из-за трудностей их изготовления в световой оптике они не встречаются. (Исключение составляет хрусталик глаза, показатель преломления которого возрастает от периферии к центру.) Аналогом таких систем являются электронные и ионные приборы (электронный микроскоп, электронный осциллограф, электронно-лучевая трубка в телевидении и пр.), в которых роль лучей играют электроны или ионы, движущиеся в электростатических или магнитных полях, создаваемых заряженными электродами или катушками, по которым текут электрические токи. Эти электроды называются *электрическими*, а катушки — *магнитными линзами*. Получение изображений в таких системах изучается в *электронной и ионной оптике*.

2. Возможность фокусировки заряженных частиц и получения изображений в осесимметричных системах электростатических линз непосредственно следует из формальной аналогии между геометрической оптикой и классической механикой, отмеченной нами в пункте 1 параграфа 4. Действительно, согласно этой аналогии, траектория частицы в потенциальном силовом поле совпадает со световым лучом в непрерывной среде, показатель преломления которой пропорционален скорости (а в релятивистской механике — импульсу) частицы, однозначно определяющей ее положением в пространстве. Например, можно положить

$$n = \sqrt{2(W - eV)}, \quad (25.1)$$

где W — полная энергия частицы, e — ее заряд, V — потенциал электростатического поля.

3. Несколько труднее понять действие магнитных линз и комбинаций таких линз с электростатическими линзами. Для исследования вопроса рассмотрим статическое электромагнитное поле, обладающее симметрией вращения вокруг некоторой оси. Эту ось примем за ось X цилиндрической системы координат. Расстояние до оси X будем обозначать через r , а азимутальный угол — через φ . Ввиду симметрии вращения, электрическое и магнитное поля не могут зависеть от φ . Предположим кроме того, что всякая плоскость, проходящая через ось

X , является плоскостью симметрии поля, Тогда не будет φ -составляющих электрического и магнитного полей ($E_\varphi = B_\varphi = 0$). Оставшиеся x - и r -составляющие этих полей будут функциями только координат x и r . Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ после умножения на r запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(rB_x) + \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = 0. \quad (25.2)$$

Введем потенциальную функцию $A(x, r)$, определяемую условием $rB_x = -\partial A/\partial r$. Тогда предыдущее уравнение преобразуется в

$$\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right),$$

откуда $rB_r = \partial A/\partial x$, причем «постоянную интегрирования» (точнее — функцию x) мы без ущерба для общности положили равной нулю. Таким образом,

$$rB_x = -\frac{\partial A}{\partial r}, \quad rB_r = \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (25.3)$$

Отсюда

$$A(x, r) = \int r(B_r dx - B_x dr). \quad (25.4)$$

В силу (25.2) входящий сюда интеграл не зависит от пути интегрирования, а только от его начальной и конечной точек. Условимся помещать начальную точку на оси системы. На оси системы в силу симметрии $B_r = 0$. Поэтому не имеет значения, в каком месте этой оси выбрать начальную точку. От этого значение интеграла (25.4) не зависит, и он может быть представлен в виде

$$A(x, r) = -\int_0^r B_x r dr. \quad (25.5)$$

Обратимся теперь к исследованию движения частицы с массой m и зарядом e , ограничиваясь ради простоты нерелятивистским приближением. Угловую скорость φ частицы можно найти из уравнения моментов

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = M_x,$$

где M_x — момент сил, действующих на частицу, относительно оси X . Электрическое поле не влияет на момент M_x . Он создается только силой $F = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]$, действующей со стороны магнитного поля. Вычисляя этот момент, находим

$$M_x = \frac{er}{c}(B_r v_x - B_x v_r) = \frac{e}{c}\left(v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_r \frac{\partial A}{\partial r}\right).$$

Если под x , r и φ понимать координаты движущейся частицы, то $A(x, r)$ станет функцией времени t . Производная этой функции равна

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial r} \frac{dr}{dt} = v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_r \frac{\partial A}{\partial r}.$$

Следовательно,

$$M_x = \frac{e}{c} \frac{dA}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = \frac{e}{c} \frac{dA}{dt}.$$

Отсюда

$$\dot{\varphi} = \frac{e}{mcr^2} A + \frac{C}{mr^2}.$$

Постоянная C должна обращаться в нуль. Иначе (так как на оси системы функция A равна нулю) при $r = 0$ мы получили бы $r\dot{\phi} = \infty$. А это невозможно, так как $r\dot{\phi}$ есть линейная скорость частицы в ее вращении вокруг оси X . Таким образом,

$$\dot{\phi} = \frac{eA}{mcr^2}. \quad (25.6)$$

Возьмем теперь уравнение движения частицы

$$m\mathbf{a} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right), \quad (25.7)$$

где \mathbf{a} — ускорение. При проектировании его на ось X и направление радиуса r слева получим соответственно $ma_x = m\ddot{x}$ и ma_r . Радиальное ускорение в цилиндрической системе координат определяется выражением $a_r = \ddot{r} - \omega^2 r$ (см. т. I, § 46). Введем еще электрический потенциал V и учтем соотношения (25.3) и (25.6). Тогда после недлинных преобразований из (25.7) получим

$$m\ddot{x} = -e \frac{\partial}{\partial x} \left(V + \frac{eA^2}{2mc^2 r^2} \right), \quad m\ddot{r} = -e \frac{\partial}{\partial r} \left(V + \frac{eA^2}{2mc^2 r^2} \right). \quad (25.8)$$

Задача о движении частицы распалась на две *независимые задачи*: определение угловой координаты ϕ и определение координат x и r . Для решения первой задачи имеется уравнение (25.6), а для второй — уравнения (25.8). Формально вторая задача идентична с задачей определения траектории заряженной частицы в плоском электростатическом поле с потенциалом

$$U = V + \frac{eA^2}{2mc^2 r^2}. \quad (25.9)$$

Ее формальным аналогом в оптике служит задача о распространении светового луча в неоднородной изотропной среде с показателем преломления

$$n = \sqrt{2m(W - eV) - \frac{e^2 A^2}{c^2 r^2}} = \sqrt{n_0^2 - \frac{e^2 A^2}{c^2 r^2}}, \quad (25.10)$$

где $n_0 = \sqrt{2m(W - eV)}$ — «показатель преломления» в отсутствие магнитного поля. Для получения окончательной формы траектории частицы надо наложить на этот «луч» *дополнительное вращение*, выражаемое формулой (25.6).

Учтем теперь условие параксиальности. Для этого разложим $B_x(x, r)$ в ряд по степеням r . Ввиду осевой симметрии, это разложение может содержать только четные степени r . Оборвем разложение на члене нулевой степени — в этом приближении поле B_x не зависит от r . Вынося B_x из-под знака интеграла (25.5) и выполнив интегрирование, получим

$$A = -\frac{1}{2} B_x r^2, \quad (25.11)$$

а после подстановки в формулу (25.6)

$$\dot{\phi} = -eB_x/2mc, \quad (25.12)$$

Отсюда

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{v_x} \frac{eB_x}{2m\omega}. \quad (25.13)$$

В параксиальном приближении скорость v_x также не зависит от расстояния r до оси X и равна скорости частицы, движущейся вдоль этой оси. Поэтому производные $d\phi/dx$ имеют одинаковые значения для всех частиц, независимо от наклона их траекторий к оси X . Если l — расстояние от предметной плоскости до плоскости изображения, то на этом расстоянии в параксиальном приближе-

нии все частицы поворачивают вокруг оси симметрии системы на один и тот же угол

$$\varphi = -\frac{e}{2mc} \int_0^l \frac{B_x}{v_x} dx. \quad (25.14)$$

Следовательно, в смысле получения изображений система будет вести себя так, как если бы магнитного поля не было, а электростатическое определялось потенциалом (25.9). Магнитное поле приводит еще к несущественному повороту всего изображения вокруг оси симметрии системы на угол, определяемый формулой (25.14). В высших приближениях угол поворота зависит от наклона траектории к оси системы. Это ведет к появлению дополнительных aberrаций, обусловленных наличием магнитного поля.

4. Отметим еще одно обстоятельство. Если электрического поля нет, а магнитное поле однородно, то частица движется по спирали, вращаясь с циклотронной частотой $\omega = -eB/mc$ (см. т. III, § 86). Между тем формула (25.12) для этого случая дает угловую скорость, вдвое меньшую ω . Недоразумение легко разъясняется, если заметить, что ω есть угловая скорость вращения частицы вокруг оси спирали, тогда как формула (25.12) определяет ее вращение вокруг одной из образующих той же спирали. Допустим, например, что магнитное поле перпендикулярно к плоскости рисунка (рис. 106), а частица вращается по окружности в той же плоскости. За ось X можно, конечно, принять любую прямую, направленную вдоль поля B . Поэтому можно считать, что частица выходит из какой-то точки M этой оси. Описав окружность, она снова возвращается в исходную точку. Ее вращение вокруг точки M описывается формулой (25.12), тогда как

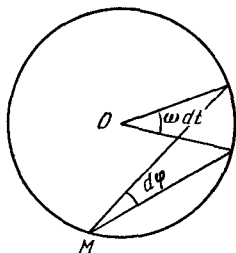


Рис. 106.

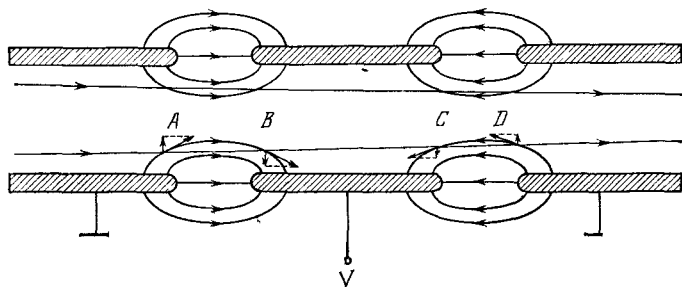


Рис. 107.

вращение вокруг центра O окружности происходит с циклотронной частотой ω . За время dt частица повернется вокруг центра O на угол ωdt , а вокруг точки M — на угол $d\varphi = \frac{1}{2}\omega dt$, так что $\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\omega$.

5. Выше фокусировка частиц в электрических линзах была объяснена с помощью аналогии со световой оптикой. Сделаем теперь то же самое, рассматривая силы, действующие на частицу. На рис. 107 представлена линза, состоящая из трех соосных металлических цилиндров одинакового диаметра. Крайние цилиндры заземлены, на средний подан положительный или отрицательный потенциал. Линзы такого типа используются в электронно-лучевых трубках и некоторых электронных микроскопах. На рисунке изображены электрические силовые линии с указанием направлений сил, действующих на частицу,

Допустим, что частица влетает в линзу, двигаясь параллельно ее оси. В области A действующая на нее сила имеет составляющую, направленную вверх. Эта сила будет смещать частицу вверх. В области B направление вертикальной составляющей силы изменится на противоположное. Однако, так как под действием электрического поля скорость частицы непрерывно возрастает, на прохождение области B частица затрачивает меньше времени, чем на прохождение области A . Поэтому поперечная скорость, приобретенная частицей в области A , не может быть скомпенсирована скоростью противоположного направления, которую она получает в области B . В результате в областях A и B и по выходе из них частица будет двигаться вверх, приближаясь к оси линзы. Аналогично, в области C на частицу действует сила, стремящаяся удалить ее от оси линзы, а в области D — приблизить. Но в этих областях частица замедляется, а потому проводит в области D большее время, чем в C . Поэтому при прохождении обеих областей C и D вертикальная скорость частицы, направленная вверх, возрастет.

Эти разъяснения объясняют, почему частицы приближаются к оси линзы. Конечно, из них не следует, что все частицы пучка соберутся в одной и той же точке на оси линзы. Для доказательства этого требуется уже количественное рассмотрение, которое и было проведено выше на основе аналогии со световой оптикой.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить фокусное расстояние тонкой оптической линзы, показатель преломления которой в пространстве меняется непрерывно.

Решение. Сначала не будем вводить предположение о тонкости линзы, а рассмотрим среду, обладающую симметрией вращения вокруг оси X . Уравнение луча в меридиональной плоскости представится в виде $r = r(x)$. Обозначим через u угол, образуемый касательной к лучу с осью X (рис. 108).

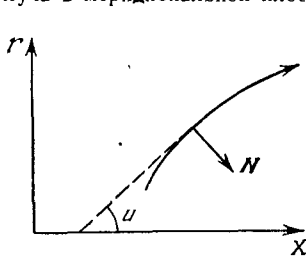


Рис. 108.

В параксиальном приближении квадратом этого угла пренебрегают. В этом приближении кривизна луча определяется выражением $1/R = -du/dx$, причем радиус кривизны R мы считаем положительным, когда луч обращен вогнутостью к главной оптической оси X , и отрицательным в противоположном случае. Воспользуемся формулой (4.1). В пределах точности параксиальной оптики $\partial r/\partial N = -\cos u \approx -1$, $\partial x/\partial N = \sin u \approx u$, так что

$$\frac{\partial n}{\partial N} = \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial N} + \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial N} \approx -\frac{\partial n}{\partial r} + u \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Так как на луче $r = r(x)$, то $n(x, r)$ можно рассматривать как сложную функцию от x , т. е. $n(x) = n[x, r(x)]$. Ее производная по x определяется выражением

$$\frac{dn}{dx} = \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x} + u \frac{\partial n}{\partial r},$$

т. е. отличается от частной производной $\partial n/\partial x$ на величину первого порядка малости по u . Поэтому замена $\partial n/\partial x$ на dn/dx в предыдущем выражении вносит ошибку второго порядка, которой мы пренебрегаем. Сделав эту замену и воспользовавшись формулой (4.1), получим

$$-\frac{1}{R} = \frac{du}{dx} = -\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial N} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} = -u \frac{dn}{dx},$$

или

$$\frac{d}{dx}(nu) = \frac{\partial n}{\partial r}. \quad (25.15)$$

Разложим $n = n(x, r)$ в ряд по степеням r и оборвем разложение на члене второй степени. Член первой степени должен отсутствовать, ввиду осевой симметрии системы. Таким образом,

$$n = n_0(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \right)_0 r^2,$$

а потому

$$\frac{\partial n}{\partial r} = r \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \right)_0.$$

Здесь нуль в индексе означает, что величина с таким индексом берется при $r = 0$, т. е. на главной оптической оси системы. В результате уравнение (25.15) переходит в

$$\frac{d}{dx}(nu) = r \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \right)_0. \quad (25.16)$$

Допустим теперь, что линза тонкая. Пусть P и P' — оптически сопряженные точки на ее оси (рис. 109). Отрезки соединяющего их луча вне линзы прямолинейны. Проинтегрируем уравнение (25.16) по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

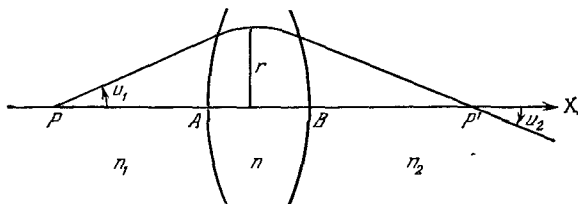


Рис. 109.

Фактически это сводится к интегрированию по отрезку AB , так как вне этого отрезка $\partial^2 n / \partial r^2 = 0$. Внутри линзы, поскольку она тонкая, радиус r можно считать постоянным и вынести его из-под знака интеграла. Это дает

$$n_2 u_2 - n_1 u_1 = r \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \right) dx,$$

где n_1 — показатель преломления в пространстве предметов, а n_2 — в пространстве изображений. Обозначим, как и раньше, через ξ и ξ' расстояния предмета P и его изображения P' от центра линзы. С учетом правила знаков $u_1 = -r/\xi$, $u_2 = -r/\xi'$, так что предыдущее уравнение переходит в

$$\frac{f}{\xi} + \frac{f'}{\xi'} = -1, \quad (25.17)$$

где

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{n_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \right)_0 dx, \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{n_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \right)_0 dx. \quad (25.18)$$

2. Вычислить фокусные расстояния тонкой электростатической линзы (примером такой линзы может служить «одионочная линза», представленная на рис. 110).

Решение. Потенциал поля V определим по формуле $1/2 mv^2 = |e| V$. При таком определении V — существенно положительная величина, В формулах

(25.18) делаем замену $n \rightarrow \sqrt{V}$. Учитывая, что на оси системы $\partial V / \partial r = 0$, получаем

$$\left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \right)_0 \rightarrow \frac{\partial^2 \sqrt{V}}{\partial r^2} = \frac{1}{2\sqrt{V}} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}.$$

При отсутствии свободных зарядов $\nabla^2 V = 0$. На оси $\partial^2 V / \partial y^2 = \partial^2 V / \partial z^2 = \partial^2 V / \partial r^2$, так что $\nabla^2 V = (\partial^2 V / \partial x^2) + 2(\partial^2 V / \partial r^2) = 0$. В результате из (25.18) находим

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{4\sqrt{V_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx. \quad (25.19)$$

Проинтегрировав по частям и приняв во внимание, что на пределах интеграла $\partial V / \partial x = 0$, получим

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{8\sqrt{V_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} V^{-3/2} E_x^2 dx, \quad \frac{1}{f'} = -\frac{1}{8\sqrt{V_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} V^{-3/2} E_x^2 dx, \quad (25.20)$$

где V_1 — потенциал пространства предметов, V_2 — пространства изображений, $E_x = -\partial V / \partial x$ — напряженность электрического поля на оси. Если $V_1 = V_2$, то $f = -f'$.

Так как $V > 0$, то для тонких электростатических линз $f > 0$, $f' < 0$. Такие линзы всегда будут собирательными. Оптические линзы, даже тонкие, могут быть

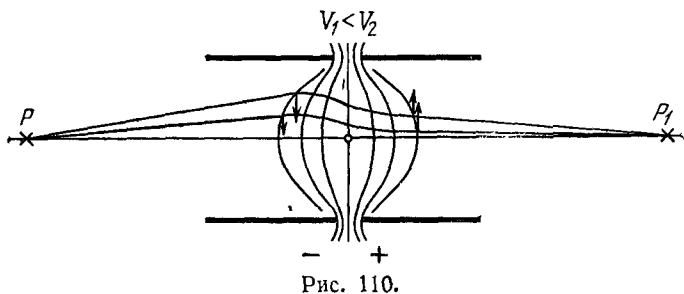


Рис. 110.

и собирательными, и рассеивающими. Это различие связано с тем, что функция $n(r)$ может быть какой угодно, тогда как потенциал $V(r)$ при отсутствии свободных зарядов должен удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2 V = 0$. Толстые электростатические линзы могут быть и собирательными, и рассеивающими. В этом нетрудно убедиться на примере системы, состоящей из двух тонких электростатических линз. Формулы (12.3) показывают, что такая система будет собирательной, когда оптический интервал Δ отрицателен, и рассеивающей, когда он положителен.

3. Предполагая, что $n_0 \gg \left| \frac{eA}{cr} \right|$, вычислить фокусное расстояние тонкой магнитной линзы.

Решение. Разлагая (25.10) в ряд и отбрасывая члены высших степеней, получим

$$n = n_0 - \frac{e^2 A^2}{2n_0 c^2 r^2} = n_0 - \frac{e^2 r^2}{8n_0 c^2} B_x^2,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} = -\frac{e^2}{4n_0 c^2} B_x^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f'} = \frac{e^2}{4n_0^2 c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_x^2 dx = \frac{e^2}{8mc^2 W} \int_{-\infty}^{+\infty} B_x^2 dx. \quad (25.21)$$

Как и электростатическая, тонкая магнитная линза всегда будет собирающей.

4. Вычислить фокусное расстояние кругового витка радиуса a тонкой проволоки, по которой течет ток I .

О т в е т. В гауссовой системе единиц

$$\frac{1}{f} = \frac{e^2 \pi^2 a^4 I^2}{8mc^4 W} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{3\pi^3 e^2}{16mc^4 W} \frac{I^2}{a}. \quad (25.22)$$

Выражая энергию W в электрон-вольтах, полагаем $W = |e| V_0$ и переходим к практическим единицам (сантиметры, вольты, амперы). Тогда получаем для электронов

$$f = -f' = 98 \frac{V_0 a}{I^2}. \quad (25.23)$$

Для короткой катушки с числом витков N

$$f = -f' = 98 \frac{V_0 a}{N^2 I^2}. \quad (25.24)$$

5. Показать, что формула (25.18) для f в предельном случае тонкой линзы с резкими краями переходит в формулу (10.9). Считать, что показатели преломления n_1 и n_2 по обе стороны линзы одинаковы.

У к а з а н и е. Принять, что показатель преломления n меняется только в бесконечно тонких слоях вблизи каждой сферической границы линзы. На всякой сферической поверхности, проведенной внутри этих слоев параллельно ближайшей поверхности линзы, функция n постоянна. Пользуясь этим, дифференцирование по r можно заменить дифференцированием по x , а затем вычислить интеграл в формулах (25.18),