

(в условных единицах). Так как точки источника излучают некогерентно, то полная интенсивность будет

$$I = \int_{-l/2}^{+l/2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{k\Delta}{l} y + \varphi \right) \right] dy = l + \frac{l}{k\Delta} \left[ \sin \left( \frac{k\Delta}{2} + \varphi \right) + \sin \left( \frac{k\Delta}{2} - \varphi \right) \right].$$

При смещении вдоль экрана будет меняться фаза  $\varphi$ . Значения фазы  $\varphi$ , при которых интенсивность  $I$  экстремальна, найдутся из условия

$$\cos \left( \frac{k\Delta}{2} + \varphi \right) = \cos \left( \frac{k\Delta}{2} - \varphi \right),$$

откуда  $\varphi = m\pi$ , где  $m$  — целое число;

$$I = l + l \frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2} \quad \text{при четном } m,$$

$$I = l - l \frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2} \quad \text{при нечетном } m.$$

Следовательно,

$$I_{\max} = l + l \frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2}, \quad I_{\min} = l - l \frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2},$$

$$V = \frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2}. \quad (28.16)$$

Кривая видности представлена на рис. 129. Из рисунка видно, как быстро с увеличением длины  $l$  источника уменьшаются максимумы на кривой видности. Той же кривой представляется видность интерференционных полос в опытах типа зеркал и бипризмы Френеля (если только точки щелевого источника света излучают некогерентно). В этом случае  $l$  означает ширину щели.

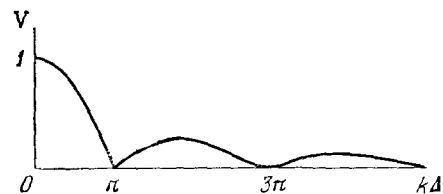


Рис. 129.

4. Решить предыдущую задачу в предположении, что все точки источника излучают когерентно и притом в одинаковых фазах.

Отв е т,

$$V = \frac{2 \left| \frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2} \right|}{1 + \left( \frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2} \right)^2}. \quad (28.17)$$

## § 29. Спектральное разложение

1. До сих пор интерференция исследовалась только в идеальном случае монохроматического света. Интерференцию в немонахроматическом свете можно исследовать, разлагая свет по теореме Фурье на монохроматические составляющие. Если волновое поле в точке наблюдения описывается периодической функцией  $E = E(t)$  с основным периодом  $\tau$  и основной частотой  $\Omega = 2\pi/\tau$ , то его можно

представить в виде вещественной части ряда Фурье:

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\Omega t}, \quad (29.1)$$

коэффициенты которого определяются выражением

$$a_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E(t) e^{-in\Omega t} dt \quad (29.2)$$

(см. т. III, § 128; конечно, в случае света постоянного слагаемого с коэффициентом  $a_0$  не будет). Средняя за период объемная плотность энергии колебаний (в условных единицах) будет

$$\bar{w} = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |E|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} w_n. \quad (29.3)$$

Она равна сумме средних плотностей энергии монохроматических колебаний, из которых складывается результирующее колебание. То же заключение справедливо и для интенсивности колебаний, если понимать под интенсивностью усредненную по периоду  $\tau$  любую энергетическую величину, характеризующую поле излучения в рассматриваемой точке пространства.

Полученный результат остается приближенно верным и для случая, когда функция  $E(t)$  не периодична, а представляется суперпозицией монохроматических колебаний, частоты которых распределены по спектру совершенно произвольно. Только в этом случае усреднение надо производить не по периоду  $\tau$  (которого теперь не существует), а по времени, весьма большому по сравнению с периодами всех монохроматических колебаний, входящих в суперпозицию. Результат приближенно верен и в случае суперпозиции почти гармонических колебаний с произвольными частотами, например для света, состоящего из узких спектральных линий.

2. Если функция  $E(t)$  не периодична, то она представляется не рядом, а *интегралом Фурье*. Для возможности такого представления на функцию  $E(t)$  придется накладывать различные (достаточные) ограничения, например требовать, чтобы она была *абсолютно интегрируема* во всем бесконечном интервале  $(-\infty, +\infty)$ , т. е. чтобы сходился интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)| dt.$$

Это обстоятельство, однако, в физике не создает никаких существенных затруднений, даже в тех случаях, когда вводят функции, не обращающиеся в нуль на бесконечности, т. е. не удовлетворяющие требованию абсолютной интегрируемости.

Действительно, пусть  $E(t)$  — такая функция. Разделим  $t$  на интервалы времени, достаточно длительные по сравнению с периодами световых колебаний. Световое поле на каждом из таких интервалов  $(t_0, t_0 + \tau)$  и его воздействие на приемник при любом значении  $t_0$  практически совсем не зависят от полей на соседних интервалах. Поэтому при рассмотрении света только на интервале  $(t_0, t_0 + \tau)$  функцию  $E(t)$  вне рассматриваемого интервала можно заменить любой другой функцией. В частности, ее можно периодически продолжить за пределы интервала  $(t_0, t_0 + \tau)$  с периодом  $\tau$ . Но тогда для представления функции  $E(t)$  в интервале  $(t_0, t_0 + \tau)$  можно воспользоваться рядом Фурье (29.1). При этом, ввиду малости частоты  $\Omega = 2\pi/\tau$ , целесообразно ввести обозначения  $\Delta\omega = \Omega$ ,  $\omega_n = n\Omega$ . Тогда

$$E(t) = \sum a_n e^{i\omega_n t} = \sum_{\Omega} \frac{a_n}{\Omega} e^{i\omega_n t} \Delta\omega.$$

После аппроксимации суммы интегралом получаем

$$E(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (29.4)$$

где  $a(\omega) = a_n/\Omega$ , или с учетом (29.2)

$$a(\omega) = \frac{1}{\tau\Omega} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (29.5)$$

Интеграл Фурье получается из этих формул, если в последнем выражении конечные пределы заменить на бесконечные  $-\infty$  и  $+\infty$  (см. т. III, § 128). Однако здесь мы не будем делать этого, оставляя время  $\tau$  неопределенным. При физической постановке задач всегда можно достигнуть необходимой точности, выбирая  $\tau$  достаточно большим. Таким путем достигается то преимущество, что формулу (29.4) в каждом интервале длительностью  $\tau$  можно будет применять и для функций  $E(t)$ , не интегрируемых абсолютно, например к плоским волнам постоянной интенсивности, не ограниченным во времени. При этом выражения (29.4) на разных интервалах времени  $\tau$  (если  $\tau$  выбрать достаточно большим), вообще говоря, не будут когерентны.

В случае интеграла Фурье формула (29.3) заменится на

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |E|^2 dt = \tau \sum |a(\omega_n) \Omega|^2.$$

Если аппроксимировать сумму интегралом и учесть, что  $\tau\Omega = 2\pi$ , то получится

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |E|^2 dt = 2\pi \int_0^{\infty} |a(\omega)|^2 d\omega. \quad (29.6)$$

О физическом смысле этого соотношения говорится ниже в пункте 5.

3. Приведем пример спектрального разложения, приводящий к важным обобщениям. Бесконечно длящееся синусоидальное колебание является идеализацией ограниченного ряда, или цуга синусоидальных волн, представленного на рис. 130, а «оборванной

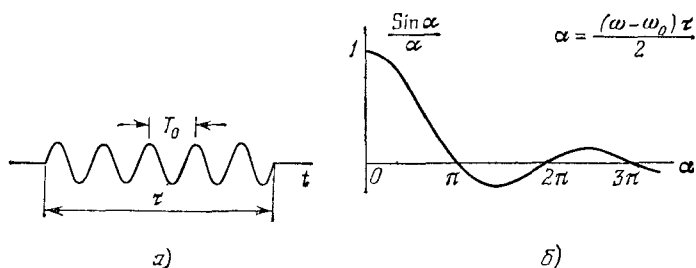


Рис. 130.

синусоидой». Пусть  $T_0$  — «период», а  $\omega_0$  — «частота» этой «синусоиды». Тогда в комплексной форме

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{1}{t} e^{t(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{2}{\pi i} \frac{\sin^{1/2}(\omega - \omega_0)\tau}{^{1/2}(\omega - \omega_0)\tau}.$$

В вещественной форме

$$E(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^{1/2}(\omega - \omega_0)\tau}{^{1/2}(\omega - \omega_0)\tau} \sin \omega t d\omega. \quad (29.7)$$

График функции  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ , где  $\alpha = \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}$ , приведен на рис. 130, б. Таким образом, оборванный цуг волн, изображенный на рис. 130, а, может быть представлен суперпозицией бесконечного множества синусоид, частоты которых непрерывно заполняют бесконечный интервал  $0 < \omega < +\infty$ . Впрочем, основное значение имеет только интервал  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$ , или  $\omega_0 - \frac{\pi}{\tau} < \omega < \omega_0 + \frac{\pi}{\tau}$ , где амплитуды колебаний велики. На всех остальных участках амплитуды малы. Если ими пренебречь, то можно сказать, что весь спектр частот практически сосредоточен в пределах интервала шириной  $\Delta\omega$ , который удовлетворяет условию

$$\Delta\omega \cdot \tau \gtrsim 2\pi. \quad (29.8)$$

Если ввести обычную частоту  $\nu = \omega/(2\pi)$ , то

$$\Delta\nu \cdot \tau \gtrsim 1. \quad (29.8a)$$

Это важное соотношение между шириной спектра  $\Delta\omega$  (или  $\Delta\nu$ ) и длительностью цуга  $\tau$  имеет общий характер. Его можно также уяснить на следующем простом примере. Рассмотрим множество синусоид с одинаковыми амплитудами, но различными частотами, непрерывно и равномерно заполняющими интервал  $\Delta\omega$ . Пусть в точке  $t = 0$  фазы всех синусоид совпадают, а следовательно амплитуда колебаний максимальна. При  $t = \tau/2$  разность фаз между крайними синусоидами будет  $\Delta\omega \cdot \tau/2$ . Если она сделается равной  $2\pi$ , то в точке  $t = \tau/2$  наложатся синусоиды со всевозможными фазами, непрерывно и равномерно заполняющими интервал шириной  $2\pi$ . При таком наложении, как легко уяснить с помощью векторной диаграммы, синусоиды погасят друг друга. При том же условии произойдет взаимное гашение синусоид и в точке  $t = -\tau/2$ . Таким образом, выделится интервал времени  $(-\tau/2, +\tau/2)$ , на обоих концах которого волновое поле обратится в нуль. На этом участке время  $\tau$  связано с шириной спектра  $\Delta\omega$  соотношением  $\Delta\omega \cdot \tau = 4\pi$ , которое по существу совпадает с (29.8).

4. Формула, аналогичная (29.8), имеет место и для пространственного распределения волнового поля, когда оно рассматривается в какой-либо фиксированный момент времени. Примером может служить «оборванная синусоида» на рис. 130, а, если по оси абсцисс откладывать координату  $x$  в направлении распространения волны. При таком рассмотрении снова можно пользоваться формулой (29.4), заменив в ней время  $t$  на координату  $x$ , а частоту  $\omega$  на волновое число  $k = \omega/v$ . Поступив так, легко найти, что длина цуга волн  $\Delta x$  связана с соответствующим интервалом волновых чисел  $\Delta k$  соотношением

$$\Delta k \cdot \Delta x \gtrsim 2\pi. \quad (29.9)$$

Этот результат будет обобщен в § 44 на случай трех измерений. Соотношения (29.8) и (29.9) играют важную роль в квантовой механике, где они при несколько иной интерпретации выражают так называемый *принцип неопределенности Гейзенберга* (1901—1976).

5. Когда ширина спектра  $\Delta\omega$  достаточно мала ( $\Delta\omega \ll \omega$ ), то соответствующий свет называют *квазимонохроматическим*. Часто пользуются также «*спектроскопическим волновым числом*»  $\tilde{k} = k/(2\pi)$ . Для него

$$\Delta\tilde{k} \cdot \Delta x \gtrsim 1. \quad (29.9a)$$

Примером могут служить спектральные линии, излучаемые разреженными газами. Квазимонохроматический свет можно выделить из непрерывного спектра излучения (например, Солнца) призмой, дифракционной решеткой или другими приборами, осуществляющими спектральное разложение. За меру монохроматичности света можно принять отношение  $|\omega/\Delta\omega|$  или равное ему отношение  $|\lambda/\Delta\lambda|$ . Наибольшей монохроматичностью обладает свет, излучаемый

мый газовыми лазерами. Нельзя, однако, упускать из виду, что пучок волн или световой пучок, занимающий спектральную область  $\Delta\omega$ , должен обладать конечной длительностью, не меньшей  $\tau \approx \approx 2\pi/\Delta\omega$ . В частности, не имеет смысла говорить о мгновенной объемной плотности энергии излучения в интервале  $d\omega$ , т. е. о величине  $\sim |dE|^2 = |a(\omega) d\omega|^2$ . Вместо мгновенной надо пользоваться средней плотностью энергии излучения за время порядка  $\tau \approx 2\pi/d\omega$ . Это значит, что интенсивность излучения в спектральном интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$  должна определяться величиной, пропорциональной  $\tau |dE|^2$ , т. е.  $|a(\omega)|^2 d\omega$ . Величину  $|a(\omega)|^2$  называют *спектральной плотностью излучения*. Именно такую величину имеют в виду, говоря о распределении интенсивности или энергии излучения в спектре. Вместо частоты можно, конечно, пользоваться длинами волн, представляя ту же величину в виде  $|a_\lambda(\lambda)|^2 d\lambda$ . Очевидно,  $a(\omega) = 2\pi c a_\lambda(\lambda)/\omega^2$ .

### ЗАДАЧА

Разложить в интеграл Фурье и найти спектральную плотность излучения для затухающего осциллятора, волновое поле которого определяется выражением

$$E(t) = e^{-t/\tau} \sin \omega_0 t \quad (t \geq 0).$$

О т в е т:  $a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0) - i/\tau},$

$$|a(\omega)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (1/\tau)^2}. \quad (29.10)$$

Если  $\omega - \omega_0 = 1/\tau$ , т. е.  $\Delta\omega \cdot \tau = 1$ , то спектральная плотность излучения уменьшается в два раза.

Этот пример снова подтверждает общее соотношение (29.8). В примере, рассмотренном в тексте (рис. 130, б), спектральная плотность излучения  $|a(\omega)|^2$  на краях интервала  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  убывает в  $(\pi/2)^2 \approx 2,5$  раза по сравнению с той же величиной при  $\alpha = 0$ .

## § 30. Влияние немонахроматичности света

1. Как и увеличение размеров источников, немонахроматичность света ведет сначала к *ухудшению контрастности* (видимости) интерференционных полос, а затем к полному исчезновению их. Чтобы не усложнять исследование учетом конечных размеров источника, будем предполагать, что источник света  $S$  точечный. Пусть  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 113) — когерентные источники, являющиеся действительными или мнимыми изображениями источника  $S$ . Допустим сначала, что излучение источника  $S$  состоит из двух близких одинаково интенсивных спектральных линий с длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ . Точка или линия экрана, где оптическая разность