участках спектра. Но глаз — *селективный приемник*, т. е. его чувствительность к различным длинам волн разная (см. кривую видности человеческого глаза на рис. 82). Именно поэтому в белом свете глаз видит около десятка интерференционных полос. Полосы цветные, так как из-за различия в длинах волн полосы разного цвета имеют разную ширину и сдвинуты относительно друг друга. Только в центре картины, куда волны от обоих источников приходят в одинаковых фазах, соблюдается условие максимума для всех длин волн. Там получается *ахроматическая*, т. е. неокрашенная, светлая интерференционная полоса. В опыте с зеркалом Ллойда ахроматическая полоса темная. Это доказывает, что отражение света от зеркала сопровождается изменением фазы волны на π (см. §§ 33, 65). Конечно, при обычной постановке опыта (рис. 119) ахроматическую полосу увидеть нельзя, так как луч, отражающийся от зеркала, проходит больший путь, чем прямой луч. Чтобы получить эту полосу, надо на пути прямого луча поставить плоскопараллельную пластинку, смещающую вверх всю интерференционную картину.

§ 31. Корреляция и когерентность света

1. При точном количественном определении понятия когерентности надо учесть, что реальные световые колебания *не синусоидальны*. Напряженность поля в каждой точке пространства может быть представлена интегралом Фурье (29.4), т. е. в виде суперпозиции синусоидальных колебаний различных частот. Если область $\Delta\omega$, заполняемая этими частотами, мала по сравнению с самими частотами ω, входящими в суперпозицию, то результирующее колебание и представляемый им свет называются *квазимонохроматическими*. Выбрав внутри интервала $\Delta\omega$ произвольную частоту ω_0, запишем квазимонохроматическое колебание в виде

$$E(t) = a(t)\, e^{i\omega_0 t}, \qquad (1.1)$$

где $a(t)$ — комплексная амплитуда, медленно меняющаяся по сравнению с быстро осциллирующей функцией $e^{i\omega_0 t}$. Она, конечно, определена не совсем однозначно, поскольку ее значение зависит от выбора частоты ω_0. Про колебание, представленное формулой (31.1), говорят, что оно *модулировано*.

При модуляции может медленно меняться (вещественная) амплитуда колебания или его (начальная) фаза. В первом случае говорят об *амплитудной*, во втором — о *фазовой модуляции*. Могут также одновременно меняться и амплитуда, и фаза. В случае квазимонохроматического света, излучаемого реальными источниками, такие изменения происходят хаотически — амплитуда и фаза являются *случайными функциями* времени. Поэтому при изучении реального света, в том числе и квазимонохроматического, нельзя обойтись без использования *статистических методов*. Для простоты мы отвлечемся от векторного характера колебаний, считая их скалярными.

Важно отметить, что из-за очень высоких оптических частот все существующие приемники света не позволяют регистрировать быстрые изменения напряженности световых полей за времена порядка периода световых колебаний. Обычно они не позволяют следить и за быстрыми изменениями световых потоков, обусловленных случайными изменениями амплитуд и фаз колебаний. Удается измерять только *квадраты напряженностей* световых полей, усредненные по промежуткам времени, весьма большим не только по сравнению с периодами световых колебаний, но и по сравнению с временами, в течение которых происходят случайные изменения амплитуд и фаз этих колебаний. Ниже предполагается, что световые потоки регистрируются именно такими «инерционными» приемниками.

Более того, мы будем предполагать, что световые потоки в среднем *стационарны*, т. е. значение среднего квадрата поля в каждой точке пространства одинаково для всех моментов времени и не зависит от положения на шкале времени временного интервала, по которому производится усреднение, Квадрат поля можно представить в виде

$$(\mathrm{Re}\,E)^2=\left(\frac{E+E^*}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(E^2+E^{*2})+\frac{1}{2}EE^*.$$

Если положить $a=a_0(t)\,e^{i\delta(t)}$, где $a_0(t)$ и $\delta(t)$ — *медленно меняющиеся* вещественная амплитуда и фаза, то

$$E^2+E^{*2}=a_0^2\left[e^{2i(\omega_0 t+\delta)}+e^{-2i(\omega_0 t+\delta)}\right]=2a_0^2\cos 2(\omega_0 t+\delta).$$

Эта величина осциллирует во времени очень быстро и при усреднении пропадает. Результат усреднения величины $(\mathrm{Re}\,E)^2$ определяется только последним членом $^1/_2 EE^*$. Поэтому за меру интенсивности колебаний можно принять величину $\overline{EE^*}$.

2. Допустим теперь, что в точку наблюдения P в момент времени t приходят два колебания от источников света S_1 и S_2 (рис. 113), Чтобы прийти в P в момент t, эти колебания должны выйти из S_1 и S_2 в более ранние моменты времени $t-\theta_1$ и $t-\theta_2$, где θ_1 и θ_2 — времена, затрачиваемые светом на распространение от S_1 и S_2 до точки P. Чтобы отметить это, рассматриваемые колебания в точке P обозначим через $E_1(t-\theta_1)$ и $E_2(t-\theta_2)$ соответственно. При их сложении в точке P получится результирующее колебание

$$E\equiv E(P,\,t)=E_1(t-\theta_1)+E_2(t-\theta_2).$$

Для нахождения его интенсивности в точке P умножим это равенство на комплексно сопряженное и произведем усреднение по времени. В результате получим

$$I=\overline{E_1(t-\theta_1)\,E_1^*(t-\theta_1)}+\overline{E_2(t-\theta_2)\,E_2^*(t-\theta_2)}+\\+\overline{E_1(t-\theta_1)\,E_2^*(t-\theta_2)+E_1^*(t-\theta_1)\,E_2(t-\theta_2)}.$$

В силу предположения о стационарности (в среднем) световых потоков первое слагаемое справа не зависит от θ_1 и t. Оно представляет просто интенсивность I_1 первого колебания, пришедшего в точку P:

$$I_1=\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}E_1(t-\theta_1)\,E_1^*(t-\theta_1)\,dt=\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}E_1(t)\,E_1^*(t)\,dt,$$

где τ — ширина временного интервала, по которому производится усреднение. Аналогично, второе слагаемое есть интенсивность I_2 второго колебания. По той же причине последнее слагаемое (интерференционный член) не зависит от t, а также от θ_1 и θ_2 в отдельности. Оно есть функция только разности $\theta=\theta_2-\theta_1$, т. е. времени запаздывания второго колебания относительно первого, Поэтому можно положить

$$\overline{E_1(t_1-\theta_1)\,E_2^*(t-\theta_2)}=\overline{E_1(t)\,E_2^*(t-\theta)}=F_{12}(\theta), \tag{31.2}$$

где $F_{12}(\theta)$ — комплексная функция, характеризующая *степень согласованности* рассматриваемых колебаний в точке P. Она называется *корреляционной функцией* колебаний $E_1(t-\theta_1)$ и $E_2(t-\theta_2)$ или *взаимной корреляционной функцией*.

В частном случае функции $E_1(t)$ и $E_2(t)$ могут оказаться *тождественными*. Это будет, например, когда оба колебания выходят из одного и того же источника, но приходят в точку P по различным путям. Тогда $F_{12}(\theta)$ называют *автокорреляционной функцией*, Ее можно обозначать через $F_{11}(\theta)$, но мы чаще будем применять обозначение $F(\theta)$. При $\theta = 0$ автокорреляционная функция переходит в $\overline{|E_1(t-\theta_1)|^2}$, т. е. в интенсивность колебания I_1 в точке P.

Функция $F_{12}(\theta)$ зависит от I_1 и I_2, т. е. от интенсивностей складываемых колебаний в точке P. Если положить

$$F_{12}(\theta) = \sqrt{I_1 I_2}\, f_{12}(\theta), \tag{31.3}$$

то получится *нормированная корреляционная функция*, которая зависит только от времени запаздывания θ, но уже не зависит от I_1 и I_2. Через эту функцию результирующая интенсивность в точке P представляется выражением

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\,[f_{12}(\theta)]. \tag{31.4}$$

Для квазимонохроматического света $E_1(t) = a_1(t)\,e^{i\omega_0 t}$, $E_2(t) = a_2(t)\,e^{i\omega_0 t}$, так что

$$\overline{a_1(t)\,a_2^*(t-\theta)}\,e^{i\omega_0\theta} = \sqrt{I_1 I_2} f_{12}(\theta). \tag{31.5}$$

Как видно из этой формулы, величина $f_{12}(\theta)$ есть быстро меняющаяся функция времени запаздывания θ. Разделив ее на столь же быстро меняющуюся осциллирующую функцию $e^{i\omega_0\theta}$, получим уже медленно меняющуюся функцию

$$\gamma_{12}(\theta) = f_{12}(\theta)\,e^{-i\omega_0\theta}, \tag{31.6}$$

которая называется *комплексной степенью когерентности колебаний*, а ее модуль $|\gamma_{12}(\theta)| = |f_{12}(\theta)|$ — просто *степенью когерентности колебаний* в точке P. Таким образом,

$$\overline{a_1(t)\,a_2^*(t-\theta)} = \sqrt{I_1 I_2}\gamma_{12}(\theta), \tag{31.7}$$

т. е. $\gamma_{12}(\theta)$ есть *нормированная взаимная корреляционная функция для амплитуд* $a_1(t)$ *и* $a_2(t)$. Далее,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\left[\gamma(\theta)\,e^{i\omega_0\theta}\right]. \tag{31.8}$$

Полагая $\gamma_{12}(\theta) = |\gamma_{12}(\theta)|\,e^{i\delta}$, запишем последний результат в вещественной форме:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}(\theta)|\cos(\omega_0\theta + \delta). \tag{31.9}$$

Эта формула отличается от аналогичной формулы (26.7) для строго синусоидальных колебаний добавочным множителем $|\gamma_{12}(\theta)|$ в интерференционном члене и добавочным, медленно меняющимся слагаемым $\delta(\theta)$ в разности фаз. Значения вещественных амплитуд $|a_1|$ и $|a_2|$ и соответствующих интенсивностей I_1 и I_2 не зависят от выбора промежуточной частоты ω_0 в спектральном интервале $\Delta\omega$ квазимонохроматического света. Не может зависеть от выбора ω_0 и полная фаза $\omega_0\theta + \delta$, входящая в формулу (31.9). Но добавочная фаза δ, конечно, будет другой при другом выборе ω_0. Фаза $\omega_0\theta + \delta$ определяет наиболее быстрые изменения в пространстве интенсивности светового поля, т. е. изменения при переходе от одной интерференционной полосы к другой. Ввиду медленности изменения функции $|\gamma_{12}(\theta)|$, ее изменениями при таком переходе можно пренебречь. Тогда в максимумах $\cos(\omega_0\theta + \delta)$ будет равен $+1$, а в минимумах -1. Поэтому

$$I_{\text{макс}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}(\theta)|, \quad I_{\text{мин}} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}(\theta)|.$$

Отсюда для видности интерференционных полос находим

$$V \equiv \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}} + I_{\text{мин}}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\,|\gamma_{12}(\theta)|. \tag{31.10}$$

Когда интенсивности складываемых колебаний одинаковы ($I_1 = I_2$), то $V = |\gamma_{12}(\theta)|$. По самому определению видность V не может быть больше единицы, а функция $\gamma_{12}(\theta)$ от интенсивностей пучков не зависит. Поэтому всегда $|\gamma_{12}(\theta)| \lesssim 1$.

Когда $|\gamma_{12}(\theta)| = 0$, то $V = 0$, т. е. интерференционных полос не получается. В этом случае колебания называются *некогерентными*. Если при этом функция $\gamma_{12}(\theta)$ обращается в нуль при любых значениях θ, то некогерентность называется *полной*. Тогда всюду $I = I_1 + I_2$, т. е. имеет место *закон фотометрического сложения* интенсивностей. Такой случай осуществляется при наложении световых пучков от независимых источников света.

Если же $\gamma_{12}(\theta) \neq 0$, то наблюдается интерференция, и колебания называются *когерентными*. Когерентность называется *полной*, когда величина $|\gamma_{12}(\theta)|$ всюду достигает своего предельного значения 1. В этом случае интерференционные полосы наиболее контрастны, т. е. при заданных I_1 и I_2 видность V максимальна. Такой случай реализуется при наложении строго периодических, в частности монохроматических, пучков одинаковых периодов. Во всех остальных случаях (когда $0 < |\gamma_{12}(\theta)| < 1$) говорят о *частичной когерентности*. При перемещении точки наблюдения степень когерентности $|\gamma_{12}(\theta)|$ медленно изменяется. Вследствие этого медленно изменяется и видность интерференционных полос.

3. До сих пор речь шла о когерентности двух колебаний, происходящих в *одной и той же точке* пространства. Но можно говорить о когерентности *одного и того же волнового поля* в двух различных пространственно-временных точках $R_1(Q_1, t_1)$ и $R_2(Q_2, t_2)$. Этот вопрос сводится к предыдущему.

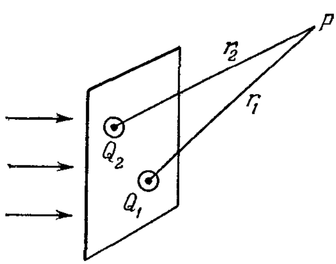

Рис. 131.

Пусть Q_1 и Q_2 — какие-либо две точки пространства, находящиеся в рассматриваемом поле излучения (рис. 131). Пусть они являются центрами двух бесконечно малых отверстий в непрозрачном экране, поставленном на пути распространения света. Экран всюду загородит падающий свет, но пропустит свет через отверстия. Через отверстия пройдет не только прямой, но и *дифрагированный свет*. Бесконечно малые отверстия в силу принципа Гюйгенса могут рассматриваться как точечные *вторичные источники*, посылающие свет за экран во всех направлениях. Возьмем за экраном удаленную точку наблюдения P. Пусть колебания, вышедшие из точек Q_1 и Q_2 в моменты времени t_1 и t_2, приходят в точку P *одновременно*. Тогда можно говорить о когерентности этих колебаний в том смысле, как это было разъяснено выше.

По определению мы называем колебания в точках Q_1 и Q_2 в моменты времени t_1 и t_2 (т. е. в пространственно-временных точках R_1 и R_2) *когерентными* или *некогерентными*, если когерентны или некогерентны соответствующие колебания в точке P. При этом степень когерентности $\gamma(\theta)$ мы определяем той же величиной, что и для колебаний в точке наблюдения.

В частности, если пространственные точки Q_1 и Q_2 совпадают, но свет попадает в P различными путями, то пространственно-временные точки $R_1(Q_1, t_1)$ и $R_2(Q_2, t_2)$ отличаются только моментами времени t_1 и t_2. В этом случае говорят о *временной когерентности*. При $t_1 = t_2$ степень временной когерентности равна единице. С увеличением разности этих времен степень когерентности убывает. Максимальное значение $|t_1 - t_2|$, при котором когерентность еще сохраняется, называется *временем когерентности*. Расстояние $v|t_1 - t_2|$, проходимое светом за это время, называется *длиной когерентности*.

В другом крайнем случае времена t_1 и t_2 одинаковы, но пространственные точки Q_1 и Q_2 не совпадают. Тогда говорят о *пространственной когерентности*. Сохраняя точку Q_1 неподвижной, будем поворачивать вокруг нее экран вместе с точкой Q_2. Тогда точка Q_2 будет перемещаться вокруг Q_1, а степень когерентности $|\gamma_{12}|$ будет меняться. Геометрическое место точек, где γ_{12} обращается в нуль, есть некоторая поверхность, окружающая точку Q_1. Объем, который она ограничивает, называется *объемом когерентности* вокруг точки P_1.

Вычисление степени временной когерентности может быть систематически использовано при определении допустимой ширины спектральной области, а пространственной когерентности — допустимых размеров источников света для возможности наблюдения интерференции.

4. Иллюстрируем понятие и свойства автокорреляционной функции и степени когерентности на простейшем примере, когда оба колебания представляются «оборванной синусоидой»: $E(t) = \sin\omega_0 t$ в интервале $0 < t < \tau$ и $E(t) = 0$ вне этого интервала. Перейдем к комплексной форме $E(t) = \frac{1}{i} e^{i\omega_0 t}$ и примем τ за промежуток времени, по которому производится усреднение. Тогда $I_1 = I_2 = 1$. Произведение $E(t)\, E^*(t-\theta)$ отлично от нуля только в интервале $\theta < t < \tau$. Поэтому только при $\theta < \tau$ функция $\gamma(\theta)$ может отличаться от нуля. При $\theta > \tau$ она обращается в нуль. В первом случае

$$\overline{E(t)\, E^*(t-\theta)} = \frac{1}{\tau}\int_{\theta}^{\tau} e^{i\omega_0\theta}\, dt = \frac{\tau-\theta}{\tau} e^{i\omega_0\theta} = F(\theta) = f(\theta).$$

Следовательно,

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} 1-\theta/\tau & \text{при} \quad \theta < \tau, \\ 0 & \text{при} \quad \theta > \tau. \end{cases} \qquad (31.11)$$

К тому же результату мы пришли бы, если бы предположили, что источник света излучает цуги волн одинаковой длительности τ, беспорядочно следующие друг за другом, причем каждый цуг разделяется на две части, идущие к точке наблюдения различными путями. Это непосредственно следует из того, что различные цуги, испускаемые источником, *статистически независимы* и поэтому не интерферируют между собой. Из формулы (31.11) следует физически очевидный результат, что колебания когерентны, если время запаздывания θ меньше длины цуга τ. В противоположном случае они некогерентны. Значит, τ есть время когерентности колебаний.

5. Модуль функции $|\gamma_{12}(\theta)|$ легко вычислить по формуле (31.10), измерив предварительно видность полос V и интенсивности I_1 и I_2 накладывающихся пучков в точке наблюдения. Значительно труднее измерить добавочную фазу δ, входящую в формулу (31.9). Особенно трудно это сделать, когда источниками света являются узкие спектральные линии. Для этого надо сравнить в *одном и том же месте* интерференционной картины номера интерференционных полос от рассматриваемого источника света с номерами полос от источника с частотой ω_0. Для номера максимума N-й интерференционной полосы от первого источника можно написать $\omega_0\theta + \delta = 2\pi N$. В том же месте второй источник, вообще говоря, не даст максимума. Этому месту будет соответствовать уже дробное число интерференционных полос, определяемое условием $\omega_0\theta = 2\pi N_0$. Отсюда $\delta = 2\pi(N - N_0)$. Таким путем в принципе можно экспериментально определить не только модуль, но и аргумент комплексной степени когерентности $\gamma_{12}(\theta)$. Вместе с тем можно определить и корреляционную функцию $F_{12}(\theta)$.

6. Автокорреляционная функция $F(\theta)$ связана важным соотношением со спектральной плотностью $I_\omega(\omega)$ излучения. Для установления этой связи пишем на основании определения автокорреляционной функции:

$$F(\theta) = \overline{E(t)\, E^*(t-\theta)} = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E(t)\, E^*(t-\theta)\, dt. \qquad (31.12)$$

Подставим сюда

$$E^*(t-\theta) = \int_0^\infty a^*(\omega)\, e^{-i\omega(t-\theta)}\, d\omega$$

и поменяем порядок интегрирования по t и ω. Использовав при этом формулу (29.5), получим

$$F(\theta)=\frac{2\pi}{\tau}\int_0^{\infty} a^*(\omega)\,a(\omega)\,e^{i\omega\theta}\,d\omega.$$

Но $(2\pi/\tau)\,a^*(\omega)\,a(\omega)$ есть спектральная плотность излучения $I_\omega(\omega)$ (см. § 29, пункт 5). Следовательно,

$$F(\theta)=\int_0^{\infty} I_\omega(\omega)\,e^{i\omega\theta}\,d\omega. \tag{31.13}$$

Эта формула представляет фурье-разложение функции $F(\theta)$, а потому

$$I_\omega(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta)\,e^{-i\omega\theta}\,d\theta. \tag{31.14}$$

Формулу (31.14) можно привести к другому виду. Для этого заметим, что, ввиду стационарности светового потока, в формуле (31.12) пределы интегрирования можно заменить любыми другими, сохраняя только неизменной ширину интервала интегрирования. Используя это, нетрудно доказать, что автокорреляционная функция удовлетворяет соотношению $F(-\theta)=F^*(\theta)$. После этого формула (31.14) приводится к виду

$$I_\omega(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\infty} F(\theta)\,e^{-i\omega\theta}\,d\theta+\int_0^{\infty} F^*(\theta)\,e^{i\omega\theta}\,d\theta\right]. \tag{31.15}$$

Это соотношение можно записать в символическом виде

$$I_\omega(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(\theta)\,e^{-i\omega\theta}\,d\theta, \tag{31.16}$$

понимая его в том смысле, что левая часть равенства равна вещественной части правой. Соотношение (31.13) позволяет найти корреляционную функцию $F(\theta)$ по экспериментально измеренной спектральной плотности излучения $I_\omega(\omega)$. С помощью обратного соотношения (31.16) можно определить спектральную плотность $I_\omega(\omega)$, если экспериментально определить корреляционную функцию $F(\theta)$.

Именно так поступал Майкельсон, используя свой интерферометр для исследования структуры спектральных линий. Он измерял видность интерференционных полос в интерферометре и фазу δ, входящую в формулу (31.9), и по этим данным вычислял спектральную плотность излучения $I_\omega(\omega)$. В свое время из всех методов этот метод был наиболее точным. Позднее метод Майкельсона был вытеснен более простыми методами многолучевой интерферометрии.

§ 32. Теорема Ван-Циттера — Цернике

Определим комплексную степень пространственной когерентности γ_{12} для точек Q_1 и Q_2 экрана Э, освещаемого протяженным квазимонохроматическим самосветящимся источником света (рис. 132). Сами точки Q_1 и Q_2 должны рассматриваться как вторичные источники волн в том смысле, как это было указано в пункте 3 предыдущего параграфа. Будем предполагать, что точка наблюдения P равноудалена от Q_1 и Q_2. При этом условии вместо волн, накладывающихся в точке P, можно брать волновые поля, создаваемые первичным источником в точках Q_1 и Q_2, что и будет делаться в дальнейшем. Наши вычисления, следовательно,