

и поменяем порядок интегрирования по  $t$  и  $\omega$ , Используя при этом формулу (29.5), получим

$$F(\theta) = \frac{2\pi}{\tau} \int_0^{\infty} a^*(\omega) a(\omega) e^{i\omega\theta} d\omega.$$

Но  $(2\pi/\tau) a^*(\omega) a(\omega)$  есть спектральная плотность излучения  $I_{\omega}(\omega)$  (см. § 29, пункт 5). Следовательно,

$$F(\theta) = \int_0^{\infty} I_{\omega}(\omega) e^{i\omega\theta} d\omega. \quad (31.13)$$

Эта формула представляет фурье-разложение функции  $F(\theta)$ , а потому

$$I_{\omega}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta, \quad (31.14)$$

Формулу (31.14) можно привести к другому виду. Для этого заметим, что, ввиду стационарности светового потока, в формуле (31.12) пределы интегрирования можно заменить любыми другими, сохраняя только неизменной ширину интервала интегрирования. Используя это, нетрудно доказать, что автокорреляционная функция удовлетворяет соотношению  $F(-\theta) = F^*(\theta)$ . После этого формула (31.14) приводится к виду

$$I_{\omega}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} F(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta + \int_0^{\infty} F^*(\theta) e^{i\omega\theta} d\theta \right]. \quad (31.15)$$

Это соотношение можно записать в символическом виде

$$I_{\omega}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta, \quad (31.16)$$

понимая его в том смысле, что левая часть равенства равна вещественной части правой. Соотношение (31.13) позволяет найти корреляционную функцию  $F(\theta)$  по экспериментально измеренной спектральной плотности излучения  $I_{\omega}(\omega)$ . С помощью обратного соотношения (31.16) можно определить спектральную плотность  $I_{\omega}(\omega)$ , если экспериментально определить корреляционную функцию  $F(\theta)$ .

Именно так поступал Майкельсон, используя свой интерферометр для исследования структуры спектральных линий. Он измерял видность интерференционных полос в интерферометре и фазу  $\delta$ , входящую в формулу (31.9), и по этим данным вычислял спектральную плотность излучения  $I_{\omega}(\omega)$ . В свое время из всех методов этот метод был наиболее точным. Позднее метод Майкельсона был вытеснен более простыми методами многолучевой интерферометрии.

## § 32. Теорема Ван-Циттера — Цернике

Определим комплексную степень пространственной когерентности  $\gamma_{12}$  для точек  $Q_1$  и  $Q_2$  экрана  $\mathcal{E}$ , освещаемого протяженным квазимонохроматическим самосветящимся источником света (рис. 132). Сами точки  $Q_1$  и  $Q_2$  должны рассматриваться как вторичные источники волн в том смысле, как это было указано в пункте 3 предыдущего параграфа. Будем предполагать, что точка наблюдения  $P$  равноудалена от  $Q_1$  и  $Q_2$ . При этом условии вместо волн, накладывающихся в точке  $P$ , можно брать волновые поля, создаваемые первичным источником в точках  $Q_1$  и  $Q_2$ , что и будет делаться в дальнейшем. Наши вычисления, следовательно,

проводятся в предположении, что время запаздывания  $\theta$  равно нулю. Однако, ввиду медленности изменения функции  $\gamma_{12}(\theta)$ , вычисленным значением ее можно пользоваться не только при  $\theta = 0$ , но и при малых значениях аргумента  $\theta$ , пока видность интерференционных полос не претерпит существенных изменений.

Для простоты в качестве источника света возьмем малую площадку  $\sigma$ , плоскость которой параллельна плоскости экрана  $\mathcal{E}$ . Среда между источником  $\sigma$  и экраном  $\mathcal{E}$  предполагается однородной, а скорость света в ней обозначается через  $v$ . Линейные размеры площадки  $\sigma$  должны быть малы по сравнению с расстоянием ее до экрана. Предполагается также, что малы углы между «средней линией»  $OO'$  и прямыми, соединяющими произвольную точку  $S$  источника с точками  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Разобьем источник  $\sigma$  на малые площадки, линейные размеры которых малы по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Будем рассматривать их как некогерентные точечные источники, излучающие сферические волны. Волновые поля, создаваемые таким источником в точках  $Q_1$  и  $Q_2$ , представляются выражениями

$$\frac{A_m(t - r_{1m}/v)}{r_{1m}} e^{i(\omega_0 t - kr_{1m})} \quad \text{и}$$

$$\frac{A_m(t - r_{2m}/v)}{r_{2m}} e^{i(\omega_0 t - kr_{2m})},$$

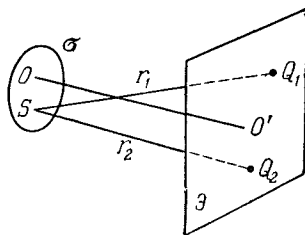


Рис. 132.

где  $r_{1m}$  и  $r_{2m}$  — расстояния  $m$ -го источника до точек  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно, Амплитуды результирующих колебаний в точках  $Q_1$  и  $Q_2$  будут

$$a_1(t) = \sum_m \frac{A_m(t - r_{1m}/v)}{r_{1m}} e^{-tkr_{1m}},$$

$$a_2(t) = \sum_m \frac{A_m(t - r_{2m}/v)}{r_{2m}} e^{-tkr_{2m}}.$$

Вычислим теперь взаимную корреляционную функцию амплитуд  $a_1$  и  $a_2$ , т. е. среднее по времени от произведения  $a_1(t) a_2^*(t - \theta)$ , в предположении, что  $\theta = 0$ . Перемножив почленно предыдущие суммы, заметим, что все слагаемые с различными  $m$  при усреднении обратятся в нуль, ввиду статистической независимости соответствующих элементарных источников света. В результате получим

$$a_1 a_2^* = \sum_m \frac{A_m(t - r_{1m}/v) A_m^*(t - r_{2m}/v)}{r_{1m} r_{2m}} e^{ik(r_{2m} - r_{1m})}.$$

(Усреднению подвергается только числитель, так как все прочие величины от времени не зависят.) Если предположить, что для всех  $m$  разности  $r_{2m} - r_{1m}$  малы по сравнению с длиной когерентности, то различие аргументов  $t - r_{1m}/v$  и  $t - r_{2m}/v$  можно не учитывать. Следовательно, в силу предполагаемой однородности световых потоков можно опустить и сами аргументы, т. е.

$$\overline{A_m(t - r_{1m}/v) A_m^*(t - r_{2m}/v)} = \overline{A_m A_m^*}.$$

Во всех практически интересных случаях число элементарных излучателей света очень велико, так что их можно считать непрерывно распределенными по площадке  $\sigma$  с определенной поверхностной плотностью. Тогда от суммы можно перейти к интегралу. Если  $I(S)$  — интенсивность света, создаваемая единицей площади источника на единичном расстоянии от него, то  $\overline{A_m A_m^*} = I(S) dS$ .

В точках  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно

$$I_1 \equiv I(Q_1) = \int_{\sigma} \frac{I(S) dS}{r_1^2}, \quad I_2 \equiv I(Q_2) = \int_{\sigma} \frac{I(S) dS}{r_2^2}.$$

Введя еще нормирующий множитель  $1/\sqrt{I_1 I_2}$ , получим окончательно

$$\gamma_{12}(0) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \int \frac{I(S)}{r_1 r_2} e^{ik(r_2 - r_1)} dS. \quad (32.1)$$

Для наглядной интерпретации полученного результата воспользуемся следующей аналогией. Пусть точка  $Q_2$  неподвижна, а точка  $Q_1$  может занимать различные положения на экране  $\mathcal{E}$ . Заменяем площадку  $\sigma$  отверстием  $\sigma'$  той же формы в непрозрачном экране. Допустим, что на него падает сферическая волна, сходящаяся в центре  $Q_2$ , волновое поле которой в точках отверстия представляется выражением

$$\psi = \frac{I(S)}{\sqrt{I_1 I_2}} e^{i(\omega_0 t + kr_2)} \equiv \psi_0(r_2) e^{i\omega_0 t}.$$

Пусть каждый элемент  $dS$  площади отверстия излучает по принципу Гюйгенса вторичную сферическую волну, поле которой в точке  $P_1$  определяется выражением  $\frac{1}{r_1} \psi_0 e^{i(\omega_0 t - kr_1)}$ . Тогда в результате суперпозиции таких вторичных волн получится волна, комплексная амплитуда которой определяется формулой (32.1). Но именно так по принципу Гюйгенса решается задача о дифракции сферической волны на отверстии  $\sigma'$  (см. § 39). Следовательно, *комплексная степень взаимной когерентности в точках  $Q_1$  и  $Q_2$  равна комплексной амплитуде в точке  $Q_1$  соответствующей дифрагированной волны.*

В этом состоит *теорема Ван-Циттера — Цернике*. Она сводит вычисление степени взаимной когерентности  $\gamma_{12}$  к соответствующей задаче дифракции.

### § 33. Интерференция в пленках и пластинках

1. При освещении тонкой пленки происходит наложение волн от одного и того же источника, отразившихся от передней и задней поверхностей пленки. При этом может возникнуть интерференция. Если свет белый, то интерференционные полосы окрашены. Поэтому явление получило название *цветов тонких пленок*. Оно легко наблюдается на стенках мыльных пузырей, на тонких пленках масла или нефти, плавающих на поверхности воды, на пленках, возникающих на поверхности металлов при закалке (цвета побежалости), и т. д.

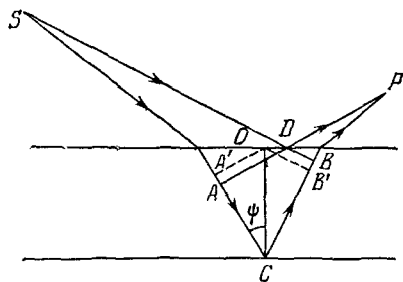


Рис. 133а.

2. Рассмотрим сначала плоскопараллельную пластинку толщины  $d$  с показателем преломления  $n$ , освещаемую точечным источником света  $S$  (рис. 133а). При отражении от поверхностей пластинки возникает оптическая разность хода между соответствующими