

Г Л А В А IV  
ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

\* \*

§ 39. Принцип Гюйгенса — Френеля. Зоны Френеля

1. Под *дифракцией света* понимают всякое отклонение от прямолинейного распространения света, если оно не может быть истолковано как результат отражения, преломления или изгибания световых лучей в средах с непрерывно меняющимся показателем преломления. Если в среде имеются мельчайшие частицы постороннего вещества (туман) или показатель преломления заметно меняется на расстояниях порядка длины волны, то в этих случаях говорят о *рассеянии света* и термин «дифракция» не употребляется. Явления дифракции для своего истолкования и количественного рассмотрения не требуют никаких новых принципов. Всякая дифракционная задача, если ее рассматривать строго, сводится к нахождению решения уравнений Максвелла, удовлетворяющего соответствующим граничным условиям. Однако в такой строгой постановке дифракционные задачи, ввиду их сложности, допускают аналитические решения лишь в простейших идеализированных случаях. В оптике значительно большее значение имеют нестрогие методы решения дифракционных задач, основанные на *принципе Гюйгенса* в обобщенной формулировке Френеля или Кирхгофа.

2. В § 3 мы указывали, что принцип Гюйгенса в том виде, в каком он был сформулирован самим Гюйгенсом, есть не более чем *геометрический рецепт* для построения волновых фронтов. Во всех применениях вторичные волны Гюйгенса выступают не как реальные волны, а как *вспомогательные сферы*, используемые для такого построения. Эти сферы, построенные из точек волнового фронта как из центров, проявляют свое действие *только на огибающей*, которая и дает новое положение волнового фронта. При этом оставалось необъясненным, почему при распространении волны не возникает *обратная волна*.

Искусственную гипотезу об огибающей вторичных волн Френель заменил физически ясным положением, согласно которому вторичные волны при наложении *интерферируют* друг с другом. Свет должен наблюдаться во всех местах пространства, где при интерференции вторичные волны усиливаются; в тех же местах, где они взаимно гасят друг друга, должна наблюдаться темнота. Тем самым выясняется и физический смысл огибающей. К огибаю-

щей все вторичные волны приходят в *одинаковых фазах*, и их интерференция приводит к большой интенсивности света. Становится ясным, по крайней мере качественно, и отсутствие обратной волны. Вторичные волны, идущие от волнового фронта вперед, вступают в свободное от возмущений пространство. Они интерферируют только друг с другом. Напротив, вторичные волны, идущие назад, вступают в пространство, где уже есть волновое возмущение — прямая волна. При интерференции вторичные волны *гасят прямую волну*, так что после прохождения волны пространство за ней оказывается невозмущенным.

Френель дал следующую формулировку принципа Гюйгенса, несколько обобщенную Рэлеем (1842—1919). *Окружим все источники света  $S_1, S_2, S_3, \dots$  произвольной замкнутой поверхностью  $F$  (рис. 150). Каждую точку такой поверхности можно рассматривать как источник вторичных волн, распространяющихся во всех направлениях. Эти волны когерентны, поскольку все они возбуждаются одними и теми же первичными источниками. Световое поле, возникающее в результате их интерференции, в пространстве вне поверхности  $F$  совпадает с полем реальных источников света.*

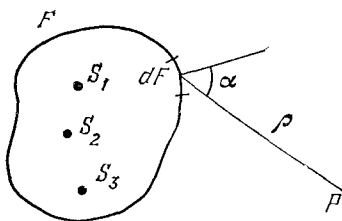


Рис. 150.

Таким образом, действительные источники света можно как бы заменить окружающей их светящейся поверхностью  $F$  с непрерывно распределенными по ней когерентными вторичными источниками. Отличие этой поверхности от реальной поверхности излучающего тела состоит в том, что она абсолютно прозрачна для всякого излучения. В такой формулировке принцип Гюйгенса — Френеля выражает весьма общее положение. Он означает, что волна, отделившаяся от своих источников, в дальнейшем ведет *автономное существование*, совершенно не зависящее от наличия источников.

3. При математической формулировке принципа Гюйгенса — Френеля будем предполагать, что источники света — монохроматические с одной и той же частотой  $\omega$ . По предположению Френеля каждый элемент площади  $dF$  поверхности  $F$  (рис. 150) испускает вторичную сферическую волну, а волновое поле в точке наблюдения  $P$  представляется суперпозицией таких волн в виде интеграла

$$E = \int \frac{a dF}{\rho} e^{i(\omega t - k\rho)} \quad (39.1)$$

по всей (замкнутой) поверхности  $F$ . Френель предположил, что амплитуда вторичной волны пропорциональна амплитуде первичной волны, приходящей к элементу  $dF$ , а также площади самого

элемента  $dF$ . Кроме того, она убывает с возрастанием угла между нормалью к поверхности  $F$  и направлением излучения вторичной волны. Конкретного выражения для амплитуды вторичной волны Френель не дал. Это было сделано только в 1883 г. Кирхгофом (1824—1887) при строгой формулировке принципа Гюйгенса — Френеля (см. § 43). Несмотря на это, Френелю удалось получить правильные решения многих дифракционных задач, пользуясь простыми интуитивными соображениями и нестрогими методами расчета. Эти простые и наглядные методы, приводящие быстро к цели, до сих пор используются при элементарном изложении теории дифракции. Они взяты за основу и в настоящей книге. Мы изменим

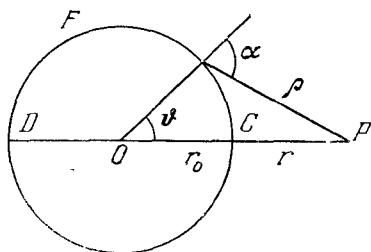


Рис. 151.

только те (не влияющие на окончательный результат) предположения Френеля, которые оказались неверными.

4. Рассмотрим сначала свободное распространение сферической волны

$$E_0 = \frac{1}{r_0} e^{i(\omega t - kr_0)} \quad (39.2)$$

в однородной среде (рис. 151). Перед этим выражением можно было

бы поставить какую-то постоянную амплитуду  $A_0$ . Мы не делаем этого, выбирая единицы измерения так, чтобы было  $A_0 = 1$ . В качестве вспомогательной поверхности  $F$  в формуле (39.1) выберем сферический волновой фронт радиуса  $r_0$ . Согласно гипотезе Френеля,  $a = K(\alpha) e^{-ikr_0}/r_0$ , где функция  $K(\alpha)$ , помимо длины волны, зависит только от угла между нормалью к волновому фронту и направлением излучения вторичной волны Гюйгенса. Полное поле в точке наблюдения  $P$  представится интегралом

$$E = \int \frac{K(\alpha)}{r_0 \rho} e^{i(\omega t - kr_0 - k\rho)} dF.$$

Если за элемент площади  $dF$  принять площадь кольца, вырезанного из волнового фронта двумя бесконечно близкими концентрическими сферами с центрами в точке наблюдения  $P$ , то  $dF = 2\pi r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta$ . Примем за переменную интегрирования расстояние  $\rho$ . Дифференцируя соотношение  $\rho^2 = r_0^2 + (r_0 + r)^2 - 2r_0(r_0 + r) \cos \vartheta$  при постоянных  $r_0$  и  $r$ , находим  $\sin \vartheta d\vartheta$ , а затем и элемент площади  $dF$ . В результате получим

$$E = \frac{2\pi}{r_0 + r} e^{i(\omega t - kr_0)} \int_r^{r_{\text{макс}}} K(\rho) e^{-ik\rho} d\rho, \quad (39.3)$$

где прежняя функция  $K(\alpha)$  теперь рассматривается как функ-

ция  $\rho$ . Верхний предел интеграла равен  $r_{\text{макс}} = r + 2r_0$ . Однако, имея в виду дальнейшие применения, мы не будем его конкретизировать. Точное вычисление интеграла (39.3), конечно, невозможно без знания вида функции  $K(\rho)$ . Однако Френель, используя малость длины световой волны, дал метод приближенного вычисления подобных интегралов при весьма общих предположениях относительно функции  $K(\rho)$ . Опишем из точки  $P$  как из центра концентрические сферы с радиусами  $r$ ,  $r + \lambda/2$ ,  $r + 2(\lambda/2)$ ,  $r + 3(\lambda/2)$ , ... (рис. 152). Они разобьют волновой фронт  $F$  на кольцевые области, получившие название зон Френеля.

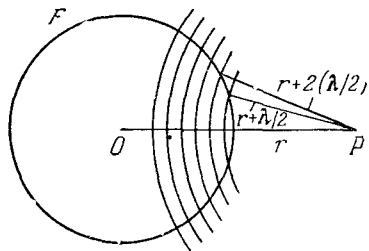


Рис. 152.

Ввиду малости длины волны, аргумент  $\rho$ , а с ним и функция  $K(\rho)$  в пределах одной зоны могут считаться постоянными. В этом приближении интеграл (39.3) по  $n$ -й зоне будет равен

$$K_n \int_{r+(n-1)\lambda/2}^{r+n\lambda/2} e^{-ik\rho} d\rho = (-1)^{n+1} \frac{2K_n}{ik} e^{-ikr},$$

где через  $K_n$  обозначено среднее значение функции  $K(\rho)$  для  $n$ -й зоны. Если  $N$  — общее число зон, посылающих вторичные волны в точку наблюдения, то поле  $E$  представится знакопеременной суммой

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_N. \quad (39.4)$$

Общий член ее имеет вид

$$E_n = (-1)^{n+1} \frac{4\pi K_n}{ik(r_0+r)} e^{i[\omega t - k(r_0+r)]}. \quad (39.5)$$

То обстоятельство, что знаки рядом стоящих слагаемых в сумме (39.4) противоположны, означает, что колебания, вносимые соседними зонами Френеля, противоположны по фазе. Этого и следовало ожидать, так как из самого построения зон Френеля видно, что одно из этих двух колебаний запаздывает относительно другого на полволны. По предположению Френеля абсолютные значения множителей  $K_n$ , а с ними и членов суммы (39.4) медленно убывают с возрастанием номера  $n$ . Уберем в сумме (39.4) слагаемое  $E_1$  и добавим слагаемое  $E_{N+1}$ . Ввиду медленности убывания членов суммы (39.4), интуитивно можно ожидать, что от этого абсолютное значение суммы (39.4) почти не изменится, а ее знак заменится на противоположный. Приняв это, наряду с (39.4) можно также написать:

$$E = -E_2 - E_3 - \dots - E_N - E_{N+1}.$$

Тогда  $2E = E_1 - E_{N+1}$ . Но в том же приближении  $E_N = -E_{N-1}$ , и следовательно,

$$E = \frac{1}{2} (E_1 + E_N). \quad (39.6)$$

Таким образом, волновое возмущение, создаваемое  $N$  первыми зонами Френеля, равно полусумме возмущений, вносимых крайними зонами.

Возьмем теперь все зоны на сферическом волновом фронте  $F$  (рис. 151). Введем предположение (обосновываемое при строгой формулировке принципа Гюйгенса, данной Кирхгофом), что при  $\alpha = \pi$ , т. е. в точке  $D$  волнового фронта, функция  $K(\alpha)$  обращается в нуль. Тогда  $E_N = 0$ , и из формулы (39.6) получаем

$$E = \frac{1}{2} E_1 = \frac{2\pi K_1}{ik(r_0+r)} e^{i[\omega t - k(r_0+r)]}, \quad (39.7)$$

т. е. при свободном распространении волны волновое возмущение от всего волнового фронта составляет половину возмущения, даваемого одной только первой зоной Френеля. Дело происходит так, как если бы из всего волнового фронта действующей осталась только часть первой зоны Френеля<sup>1)</sup>.

5. Формула (39.7) интересна также в том отношении, что она позволяет точно определить множитель  $K_1$ . Действительно, при свободном распространении сферической волны (39.2) напряженность поля заранее известна в любой точке пространства. В частности, в точке наблюдения

$$E = \frac{1}{r_0+r} e^{i[\omega t - k(r_0+r)]}.$$

Сравнивая это выражение с (39.7), находим

$$K_1 = \frac{ik}{2\pi} = \frac{k}{2\pi} e^{i\pi/2}. \quad (39.8)$$

Таким образом, множитель  $K_1$ , а также все остальные множители  $K_2, K_3, \dots$  — чисто мнимые. Значит, вторичные волны Гюйгенса опережают по фазе колебания поля в точках волнового фронта на  $\pi/2$ . Если бы такого опережения не было, то вторичные волны из центра первой френелевой зоны приходили бы в точку наблюдения с фазой  $\omega t - k(r_0 + r)$ , а от ее краев — с меньшей фазой  $\omega t -$

<sup>1)</sup> В полученном результате авторы многих книг видят доказательство прямолинейного распространения света, утверждая, что свет распространяется как бы в узком прямолинейном канале, поперечное сечение которого порядка размеров первой френелевой зоны. Однако не надо забывать, что этот вывод относится к свободному распространению волны, когда проблема прямолинейного распространения света вообще не возникает. Она возникает лишь при наличии препятствий на пути распространения света. Это есть проблема теней, являющаяся частным случаем проблемы дифракции света.

—  $k(r_0 + r)$  —  $\pi$ . Фаза результирующего колебания, возбуждаемого всей первой зоной, была бы равна полусумме этих значений, т. е. оказалась бы меньше правильного значения на  $\pi/2$ .

6. Результаты (39.6) и (39.7) имеют основное значение в методе зон Френеля. Для лучшего уяснения интерпретируем их на векторной диаграмме (см. т. III, § 126). Разобьем каждую зону Френеля на  $m$  кольцевых подзон (на рис. 153, а построение выполнено для  $m = 6$ ). Колебания, возбуждаемые в точке наблюдения такими подзонами, на векторной диаграмме изобразятся векторами  $\overline{A_0 A_1}$ ,

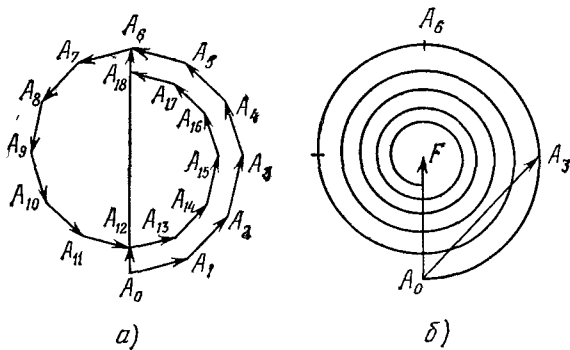


Рис. 153.

$\overline{A_1 A_2}$ ,  $\overline{A_2 A_3}$  и т. д., образующими ломаную линию. Колебание, возбуждаемое несколькими соседними подзонами, представится геометрической суммой таких векторов. Например, вектор  $\overline{A_0 A_6}$  представляет «действие» первой френелевой зоны, вектор  $\overline{A_0 A_{12}}$  — совместное действие двух первых френелевых зон, и т. п. Если число подзон  $N$  устремить к бесконечности, то в пределе ломаная перейдет в непрерывную спираль, вьющуюся вокруг фокуса  $F$  (рис. 153, б). На этой спирали действие первой френелевой зоны представляется вектором  $\overline{A_0 A_6}$ , а всего волнового фронта — вектором  $\overline{A_0 F}$ , который почти точно вдвое короче предыдущего. Действие центральной половины первой зоны представляется наклонным вектором  $\overline{A_0 A_3}$ , и т. п.

7. В § 27 (пункт 8) указывалось, что прохождение сходящейся сферической волны через фокус (т. е. ее центр) сопровождается изменением фазы на  $\pi$ . Приведем новое истолкование этого явления, используя метод зон Френеля.

Как всегда, зоны Френеля надо строить с той стороны волнового фронта, куда он распространяется. В рассматриваемом случае это будет вогнутая сторона. Конечно, и здесь вторичные волны будут опережать по фазе колебания поля на волновом фронте, так как это есть свойство самих элементарных источников вторичных волн, не зависящее от формы волнового фронта, на котором они находятся. Действие же всего волнового фронта в точке наблюдения при свободном распространении волны по-прежнему будет равно половине действия первой

френелевой зоны. В частности, вторичные волны, исходящие от этой зоны, при интерференции всегда дают правильную фазу, независимо от положения точки наблюдения. Если точка наблюдения  $P$  лежит перед центром (фокусом)  $O$  сходящейся сферической волны (рис. 154), то в наших предыдущих рассуждениях ничего не изменится, так как в этом случае колебания от краев  $A$  и  $B$  первой френелевой зоны приходят в  $P$  позже, чем от ее середины  $C$ . Но положение изменится, когда точка наблюдения  $P'$  будет находиться по другую сторону от центра  $O$

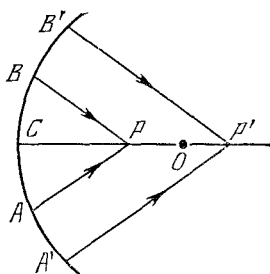


Рис. 154.

(тогда, конечно, и первая зона  $A'B'$  будет другой). Теперь края первой зоны  $A'$  и  $B'$  окажутся ближе на полволны к точке  $P'$ , чем ее центр  $C$ . Вследствие этого, помимо обычного опережения по фазе на  $\pi/2$ , вторичные волны, приходящие в  $P'$  от краев  $A'$  и  $B'$  первой зоны, получают дополнительное приращение фазы на  $\pi$ , так что полное опережение по фазе вследствие указанных двух причин составит  $\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) = \pi$ . Его надо добавить к фазе волны  $\omega t - kr$ , прошедшей через точку  $O$ . В результате мы и приходим к явлению изменения фазы сходящейся сферической волны при ее прохождении через фокус.

Когда точка наблюдения  $P$  приближается к фокусу  $O$ , френелевы зоны расширяются. В некотором положении  $P_0$  этой точки первая френелева зона охватывает всю сферу. При дальнейшем приближении к  $O$  построение зон Френеля становится невозможным. Можно сказать, что вся сфера становится как бы частью первой зоны Френеля. Применяя к этому случаю наши предыдущие рассуждения, нетрудно убедиться, что появляется опережение по фазе, заключенное между нулем и  $\pi/2$ , когда точка наблюдения находится между  $P_0$  и  $O$ . В точке  $O$  оно составляет  $\pi/2$ , а при переходе через нее возрастает до  $\pi$ . Таким образом, изменение фазы волны на  $\pi$  при переходе через фокус совершается не скачком, а непрерывно.

## § 40. Дифракция на оси от круглого отверстия и экрана. Зонная пластинка

1. Поставим между точечным источником  $S$  и точкой наблюдения  $P$  непрозрачный экран с круглым отверстием, плоскость которого перпендикулярна к оси  $SP$ , а центр  $O$  расположен на той же оси (рис. 155). Согласно Френелю, действие такого препятствия сводится к тому, что экран как бы устраняет ту часть волнового фронта, которую он прикрывает. На открытой же части волнового фронта световое поле не изменяется. Такое предположение соответствует приближению геометрической оптики, а потому оно может быть приближенно верным только тогда, когда радиус отверстия очень велик по сравнению с длиной световой волны. Это и предполагается в дальнейшем. Будем предполагать, кроме того, что размеры отверстия можно менять, что дает возможность открывать любое число зон Френеля.

Пусть  $a_0$  и  $I_0$  означают амплитуду и интенсивность света в точке  $P$  при свободном распространении волны, т. е. в отсутствие экрана. Общий световой поток, поступающий через отверстие, строго про-