

френелевой зоны. В частности, вторичные волны, исходящие от этой зоны, при интерференции всегда дают правильную фазу, независимо от положения точки наблюдения. Если точка наблюдения P лежит перед центром (фокусом) O сходящейся сферической волны (рис. 154), то в наших предыдущих рассуждениях ничего не изменится, так как в этом случае колебания от краев A и B первой френелевой зоны приходят в P позже, чем от ее середины C . Но положение изменится, когда точка наблюдения P' будет находиться по другую сторону от центра O

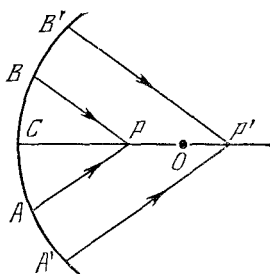


Рис. 154.

(тогда, конечно, и первая зона $A'B'$ будет другой). Теперь края первой зоны A' и B' окажутся ближе на полволны к точке P' , чем ее центр C . Вследствие этого, помимо обычного опережения по фазе на $\pi/2$, вторичные волны, приходящие в P' от краев A' и B' первой зоны, получают дополнительное приращение фазы на π , так что полное опережение по фазе вследствие указанных двух причин составит $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) = \pi$. Его надо добавить к фазе волны $\omega t - kr$, прошедшей через точку O . В результате мы и приходим к явлению изменения фазы сходящейся сферической волны при ее прохождении через фокус.

Когда точка наблюдения P приближается к фокусу O , френелевы зоны расширяются. В некотором положении P_0 этой точки первая френелева зона охватывает всю сферу. При дальнейшем приближении к O построение зон Френеля становится невозможным. Можно сказать, что вся сфера становится как бы частью первой зоны Френеля. Применяя к этому случаю наши предыдущие рассуждения, нетрудно убедиться, что появляется опережение по фазе, заключенное между нулем и $\pi/2$, когда точка наблюдения находится между P_0 и O . В точке O оно составляет $\pi/2$, а при переходе через нее возрастает до π . Таким образом, изменение фазы волны на π при переходе через фокус совершается не скачком, а непрерывно.

§ 40. Дифракция на оси от круглого отверстия и экрана. Зонная пластинка

1. Поставим между точечным источником S и точкой наблюдения P непрозрачный экран с круглым отверстием, плоскость которого перпендикулярна к оси SP , а центр O расположен на той же оси (рис. 155). Согласно Френелю, действие такого препятствия сводится к тому, что экран как бы устраняет ту часть волнового фронта, которую он прикрывает. На открытой же части волнового фронта световое поле не изменяется. Такое предположение соответствует приближению геометрической оптики, а потому оно может быть приближенно верным только тогда, когда радиус отверстия очень велик по сравнению с длиной световой волны. Это и предполагается в дальнейшем. Будем предполагать, кроме того, что размеры отверстия можно менять, что дает возможность открывать любое число зон Френеля.

Пусть a_0 и I_0 означают амплитуду и интенсивность света в точке P при свободном распространении волны, т. е. в отсутствие экрана. Общий световой поток, поступающий через отверстие, строго про-

порционален его площади. Но он будет распределяться по-разному по освещаемой поверхности, в зависимости от того, сколько зон Френеля укладывается в отверстии. В одних местах может получиться интенсивность меньше, в других больше I_0 . Никакого противоречия с законом сохранения энергии в этом нет.

Если открыть первую зону Френеля, то амплитуда и интенсивность света в той же точке будут $a_1 = 2a_0$, $I_1 = (2a_0)^2 = 4I_0$. Таким образом, интенсивность в центре P дифракционной картины получится в четыре раза большей, чем было бы при свободном распространении волны. При удалении от центра P интенсивность будет монотонно убывать. При расширении отверстия в точку P начнут приходить вторичные волны. Их интерференция с ранее пришедшими волнами вызовет уменьшение интенсивности в той же точке. При определенных размерах отверстия центр P перестанет быть точкой максимальной интенсивности. Вокруг точки P начнет образовываться светлое кольцо, к которому и переместится максимум интенсивности. Когда отверстие откроет две первые зоны Френеля, то их действия в точке P практически полностью уничтожат друг друга из-за интерференции. В точке P получится темный кружок, окруженный светлым кольцом.

При дальнейшем увеличении размеров отверстия действия двух первых зон Френеля в точке P остаются компенсированными. Все поле в P создается только частью третьей зоны Френеля. В центре

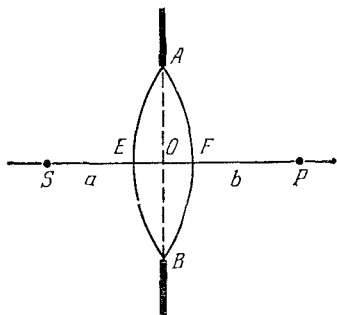


Рис. 155.

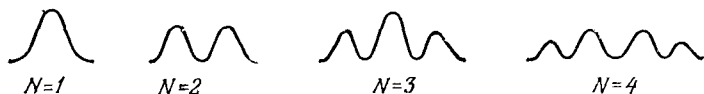


Рис. 156.

картины появляется светлое пятнышко, а центральный темный кружок расширяется и переходит в темное кольцо, окружающее это пятнышко. Когда число N открытых зон равно трем, интенсивность света в точке P будет такой же, какая получилась бы, если бы была открыта только одна третья зона. Центр картины будет практически столь же светлым, что и при одной открытой первой зоне Френеля. При $N = 4$ светлый центр сменится темным. Вообще, при нечетном N центр дифракционных колец светлый, а при четном — темный. На схематическом рис. 156 для различных N показано распределение интенсивности света в зависимости

от расстояния до центра картины, а рис. 157 воспроизводит фотографии наблюдаемой картины колец при нечетном (а) и четном (б) N .

2. Определим теперь размеры и число m зон Френеля, укладывающихся в отверстии AB (рис. 155). Пусть D — диаметр отверстия, а a и b — расстояния от его центра до точек S и P . Из точек S

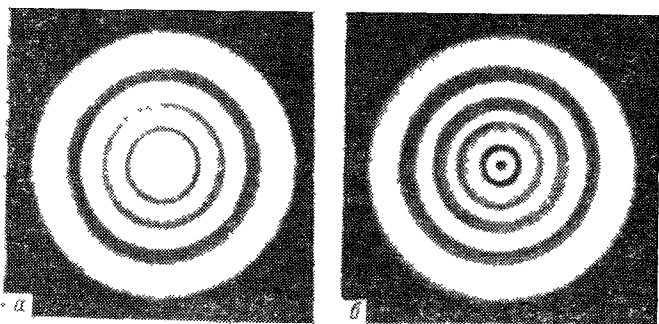


Рис. 157.

и P как из центров опишем сферы, проходящие через край отверстия AB . Пренебрегая квадратами отрезков OE и OF , по известной геометрической теореме можем написать:

$$(D/2)^2 \approx OF \cdot 2a, \quad (D/2)^2 = OE \cdot 2b.$$

Отсюда

$$EF = EO + OF = \frac{D^2}{8} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Число m найдется делением этого отрезка на $\lambda/2$. Оно равно

$$m = \frac{D^2}{4\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (40.1)$$

Если m целое, то D будет диаметром, а $R_m = D/2$ — радиусом m -й зоны, точнее — ее внешнего края. Следовательно,

$$R_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}. \quad (40.2)$$

Например, если $a = b = 1$ м, $\lambda = 600$ нм, то $R_1 \approx 0,55$, $R_2 \approx 0,77$, $R_3 \approx 0,95$ мм и т. д.

3. Интенсивность света в точке наблюдения P можно во много раз усилить, прикрыв все четные или все нечетные зоны Френеля. Оставшиеся неприкрытыми зоны будут усиливать действие друг друга. Прикрытие можно осуществить, поместив в плоскости отверстия так называемую *зонную пластинку* (рис. 158). Ее можно

изготовить, начертив на листе бумаги темные кольца, а затем сфотографировав их в уменьшенном масштабе. Внутренние радиусы колец должны быть пропорциональны квадратным корням из последовательных нечетных чисел, а внешние — из четных. Тогда получится пластинка, центр которой светлый. Можно изготовить аналогичную пластинку с темным центром. Ширина всех колец должна быть велика по сравнению с длиной волны. Тогда при надлежащих размерах колец пластинка со светлым центром будет удалять из волнового фронта все четные, а пластинка с темным центром — все нечетные зоны Френеля.

Усиление интенсивности света зонной пластинкой аналогично фокусирующему действию линзы. Более того, расстояния от пластинки до источника S и «изображения» P связаны тем же соотношением, что и соответствующие величины для линзы. Это видно, если формулу (40.1) переписать в виде

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (40.3)$$

где «фокусное расстояние» определяется формулой

$$\frac{1}{f} = \frac{4m\lambda}{D^2} = \frac{m\lambda}{R_m^2}. \quad (40.4)$$

Если центр зонной пластинки светлый, то число m — нечетное, в этом случае в формулу (40.4) входит (внешний) радиус светлого кольца пластинки. Если же центр пластинки темный, то число m — четное и под R_m следует понимать (внешний) радиус темного кольца. Какой номер брать при вычислении f — это, конечно, не имеет значения.

С помощью зонной пластинки можно даже получать оптические изображения, хотя и весьма низкого качества.

В отличие от линзы, зонная пластинка имеет несколько фокусов. Действительно, найдем положение точки наблюдения P , при котором в центральном круге пластинки уместятся первые три зоны Френеля. Тогда в следующее кольцо пластинки попадут четвертая,

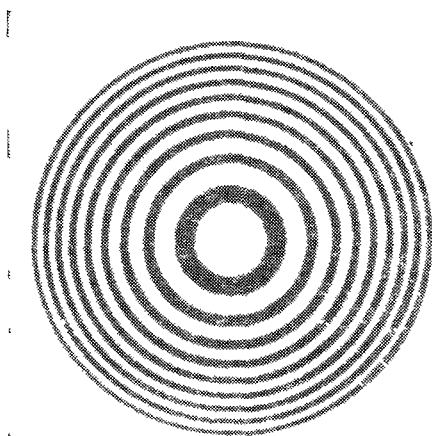


Рис. 158.

пятая и шестая зоны и т. д. Если центр зонной пластинки светлый, то поле в точке P представится суммой

$$E = (E_1 + E_2 + E_3) + (E_7 + E_8 + E_9) + (E_{13} + E_{14} + E_{15}) + \dots,$$

или $E = E_1 + E_7 + E_{13} + \dots$, так как действия соседних зон практически уничтожают друг друга. Таким образом в P получится максимум (фокус). Фокусное расстояние найдется по формуле $f_1 = R_1 / (3\lambda) = f/3$. Аналогично находятся фокусы высших порядков:

$$f_n = \frac{f}{2n+1}, \quad (40.5)$$

где n — целые числа, которым можно придавать не только положительные, но и отрицательные значения. Отрицательным значениям соответствуют расходящиеся волны и *мнимые фокусы*.

Рэлей указал, что интенсивность света в точке наблюдения P увеличится в четыре раза, если изменить на π фазы вторичных волн, исходящих от всех зон Френеля с четными (или нечетными) номерами. Такая «зонная пластинка с обращением фазы» была изготовлена Вудом (1868—1955) путем травления поверхности стеклянной пластинки. Ее действие вполне эквивалентно действию линзы, поскольку в обоих случаях вторичные волны от всех точек волнового фронта приходят в P в одинаковых фазах.

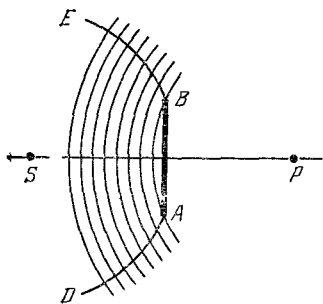


Рис. 159.

4. Поставим теперь между источником S и точкой наблюдения P непрозрачный круглый экран AB (рис. 159), плоскость которого перпендикулярна к оси SP . Пусть DA и BE — неприкрытые части волнового фронта сферической волны, исходящей из источника S . Разобьем ее на кольцевые зоны Френеля, начав их построение от края экрана. Рассуждая как раньше, представим напряженность поля излучения в точке P в виде половины напряженности, создаваемой в этой точке вторичными волнами первой кольцевой зоны Френеля. Следовательно, каков бы ни был диаметр диска, в центре P его геометрической тени должно наблюдаться *светлое пятнышко*. Такой вывод был сделан Пуассоном (1781—1840) и показался последнему столь абсурдным, что он выдвинул его в качестве возражения против волновой теории света Френеля. Араго (1786—1853) немедленно поставил опыт и обнаружил пятнышко в соответствии с выводом Пуассона¹⁾. Явление получило

¹⁾ Моральди наблюдал такое пятнышко еще в 1723 г. Вероятно, еще раньше (1715 г.) оно наблюдалось Делилем, хотя указания последнего недостаточно ясны. Однако эти наблюдения остались незамеченными и были забыты, поскольку природа явления не была понята.

название *пятна Араго — Пуассона*. Наблюдаемая картина дифракции от круглого экрана приведена на рис. 160.

Если точка наблюдения P не находится в центре картины, то кольцевые зоны Френеля, конечно, можно построить и для нее. Однако зоны, расположенные ближе к центру, окажутся неприкрытыми лишь частично. Это сильно усложняет вычисление интенсивности света. Можно только сказать, что дифракционная картина должна обладать осевой симметрией. Вне геометрической тени получается система концентрических светлых и темных полос. Внутри самой геометрической тени также могут получиться дифракционные кольца, в особенности когда экран прикрывает небольшое число зон Френеля. Но эти кольца мало контрастны, а распределение света в них сложное.

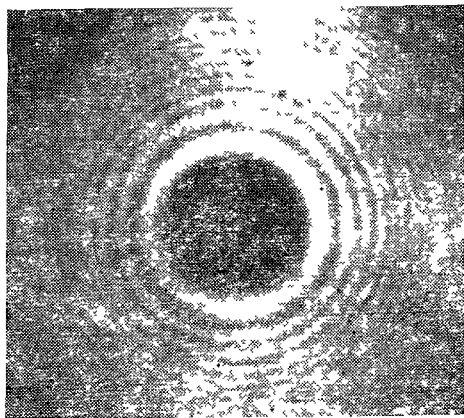


Рис. 160.

Демонстрацией явления пятна Араго — Пуассона может служить опыт Поля. Он сфотографировал ярко освещенный шаблон, заменив объектив гладким металлическим шаром. Эта фотография воспроизведена на рис. 161, а параметры установки приведены в задаче в конце этого параграфа. Ангерер сфотографировал изображение человеческого лица, заменив шар металлическим диском.

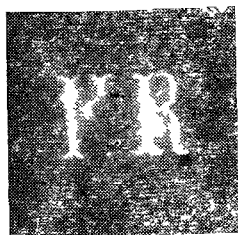


Рис. 161.

5. Применим метод зон Френеля к объяснению теней, т. е. *прямолинейного распространения света*. Поскольку речь идет о законе, от которого принципиально должны наблюдаться отступления, наши рассуждения не могут претендовать на строгость.

Пусть на пути распространяющейся волны поставлен экран или отверстие произвольной формы. Их размеры должны быть велики по сравнению с длиной волны. Разобьем волновой фронт на кольцевые зоны Френеля. Некоторые зоны могут оказаться открытыми полностью, другие частично, третьи совсем закрытыми.

Допустим сначала, что точка наблюдения лежит вне геометрической тени, далеко от ее границы. Первые члены ряда (39.4) получатся такими же, как и при свободном распространении волны. Последующие члены начнут изменяться из-за частичного экранирования соответствующих им зон. В зависимости от формы края экрана эти изменения будут носить более или менее нерегулярный характер. Если обнаружится тенденция убывания их по абсолютной величине, то правдоподобно допустить, что напряженность поля в точке наблюдения окажется равной половине напряженности, создаваемой центральной зоной. В случае точечного источника и ровного края экрана это может оказаться и не совсем так. Однако, если источник не совсем точечный, а края экрана не совсем ровные, то произойдет *статистическое сглаживание* при наложении дифракционных картин от точечных источников, на которые можно разложить протяженный источник. Тогда вдали от края экрана получится такая же освещенность, какая получилась бы при свободном распространении волны.

Допустим теперь, что точка наблюдения лежит внутри геометрической тени, опять далеко от ее границы. Первые зоны Френеля будут полностью закрыты. Нумерацию зон начнем с первой (частично) открытой зоны. Представим поле рядом

$$E = (E_1 + E_2 + \dots + E_N) + (E_{N+1} + E_{N+2} + \dots),$$

в котором $N + 1$ означает номер первой целиком открытой зоны. Ко второй скобке применимы рассуждения, применявшиеся выше в случае свободного распространения волны. Поэтому вторая скобка приблизительно равна $\frac{1}{2} E_{N+1}$. В первой скобке слагаемые меняются более или менее нерегулярно, обнаруживая в среднем тенденцию возрастания по абсолютной величине. При статистическом усреднении (с учетом неполной точечности источника и неровностей краев экрана) эти нерегулярности сглаживаются, так что первую скобку можно принять равной $\frac{1}{2} (E_1 + E_N)$, или $\frac{1}{2} E_N$, поскольку величина E_1 должна считаться близкой к нулю из-за малости открытой части соответствующей зоны. Таким образом, $E = \frac{1}{2} (E_N + E_{N+1}) \approx \approx 0$, так как для соседних зон $E_N \approx -E_{N+1}$. Итак, при погружении в область геометрической тени интенсивность света обращается в нуль.

Если источник точечный, а края экрана резкие, то граница геометрической тени расщепляется в дифракционные полосы, как это мы видели при рассмотрении дифракции на круглых отверстиях и экране. Однако, если края экрана неровные, то полосы начинают размываться, а при увеличении размеров источника переходят в полутень,

ЗАДАЧИ

1. В опыте Поля, описанном в тексте, диаметр шара $D = 40$ мм, расстояние от фотографируемого шаблона до шара $a = 12$ м, расстояние от шара до изображения $b = 18$ м, размер шаблона $y = 7$ мм. Определить размер его изображения y' . При каких условиях опыт удастся с шаром, поверхность которого испещрена множеством неправильных царапин?

О т в е т, $y' = \frac{b}{a} y = 10,5$ мм. Для удачи опыта необходимо, чтобы глубина царапин h не превосходила ширины крайней френелевой зоны:

$$h = \frac{\lambda}{D} \frac{ab}{a+b} = 180\lambda = 0,1 \text{ мм.}$$

2. Оценить максимальные угловые размеры α предмета, который можно сфотографировать с помощью непрозрачного диска с идеально гладкими краями.

Р е ш е н и е. При смещении точечного объекта в сторону с главной оптической оси диск представится эллипсом. Малая полуось эллипса будет отличаться от радиуса диска на $r \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$. Это отличие не должно превышать ширины крайней френелевой зоны. Из этого условия для максимально допустимых угловых размеров предмета находим

$$\alpha < \frac{4}{D} \sqrt{\frac{\lambda ab}{a+b}} \approx 0,2 \text{ рад} \approx 10^\circ,$$

где использованы обозначения и численные данные из предыдущей задачи.

3. Зонная пластинка применяется для фотографирования предмета, который виден из места нахождения пластинки под углом $\alpha = 0,1$ рад. Оценить оптимальное число зон пластинки для получения наибольшей яркости и отчетливости изображения.

Р е ш е н и е. Допустим сначала, что источник света S точечный, а зонная пластинка CD наклонена к оптической оси под углом $(\pi - \alpha)/2$ (рис. 162). Из рисунка видно: $x^2 = a^2 + R^2 + 2aR \sin \frac{\alpha}{2}$, и аналогично для y . Извлекая квадратные корни и пренебрегая всеми степенями радиуса R , начиная с третьей, получим для разности хода между лучами SCP и SOP :

$$\Delta = (x + y) - (a + b) = \frac{R \cos^2(\alpha/2)}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

или $\Delta = \Delta_0 - \delta\Delta$. Здесь Δ_0 — значение Δ при отсутствии наклона зонной пластинки, а $\delta\Delta$ — приращение величины Δ , обусловленное наклоном:

$$\delta\Delta = \Delta_0 \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \Delta_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{1}{4} \Delta_0 \alpha^2.$$

Если $\delta\Delta \ll \lambda$, то наклон пластинки не скажется существенно на работе зон, расположенных в пределах круга радиуса R . Если же $\delta\Delta \approx \lambda/2$, то все зоны, расположенные выше этого круга, становятся бесполезными и даже вредными. Из этого условия находится предельное значение разности хода: $\Delta_0 \approx 2\lambda/\alpha^2$. Соответствующее число зон Френеля будет

$$N \approx \frac{\Delta_0}{\lambda/2} \approx \frac{4}{\alpha^2}.$$

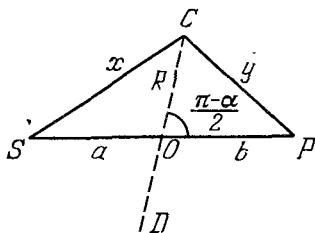


Рис. 162.

Допустим теперь, что фотографируемый предмет не точечный, причем его центр расположен на оси зонной пластинки. Для периферийных точек предмета, не лежащих на оси пластинки, последняя действует как наклоненная под углом $\alpha/2$. Поэтому предельное число зон Френеля, при котором должно получиться наиболее отчетливое изображение, будет

$$N \sim 4/\alpha^2 \sim 400.$$

§ 41. Метод Френеля решения дифракционных задач. Дифракция Фраунгофера и Френеля

1. Принципа Гюйгенса еще недостаточно для решения дифракционных задач, если даже пользоваться точной формулировкой его, данной Кирхгофом (см. § 43). Этот принцип сводит только любую дифракционную задачу к определению волнового поля на произвольной замкнутой поверхности F , окружающей все источники света (рис. 150). Но точное определение поля на поверхности F возможно лишь после нахождения его во всем пространстве. Эту трудность Френель преодолел введением специальной гипотезы, которой мы, в сущности, уже пользовались в предыдущем параграфе. Сформулируем ее на примере непрозрачного плоского экрана с отверстиями, поставленного на пути распространяющейся волны.

Выберем в качестве вспомогательной поверхности F заднюю (т. е. неосвещаемую) сторону экрана. Примем, что на всех участках этой поверхности, которые прикрыты экраном, волновое поле равно нулю, а на отверстиях определяется приближенными законами геометрической оптики, т. е. такое, какое получилось бы в отсутствие экрана. Тем самым интегрирование в (39.1) распространяется только на отверстия, где волновое поле считается известным. Отметим недостатки введенной гипотезы.

1) Распространение гипотезы на неплоские экраны неоднозначно, так как в этом случае неясно, как провести вспомогательную поверхность через отверстия экрана.

2) Гипотеза противоречива. Если с помощью принципа Гюйгенса вычислить волновое поле во всем пространстве, то на поверхности F оно не совпадает с исходным полем, принятым при вычислении. На задних сторонах экранов вычисленное поле не обратится в нуль, а на отверстиях не будет совпадать с полем свободно распространяющейся волны.

3) Гипотеза допускает разрыв волнового поля на краях отверстий, что противоречит граничным условиям электродинамики Максвелла.

4) Гипотеза противоречит поперечности световых волн. Это противоречие не устраняется заменой скалярных колебаний векторными. Колебания, как и при изучении явлений интерференции, мы считали скалярными лишь ради простоты. При переходе к векторным колебаниям математическая формулировка принципа Гюйгенса и полученные из него результаты по существу не изменятся. Как