

Допустим теперь, что фотографируемый предмет не точечный, причем его центр расположен на оси зонной пластинки. Для периферийных точек предмета, не лежащих на оси пластинки, последняя действует как наклоненная под углом $\alpha/2$. Поэтому предельное число зон Френеля, при котором должно получиться наиболее отчетливое изображение, будет

$$N \sim 4/\alpha^2 \sim 400.$$

§ 41. Метод Френеля решения дифракционных задач. Дифракция Фраунгофера и Френеля

1. Принципа Гюйгенса еще недостаточно для решения дифракционных задач, если даже пользоваться точной формулировкой его, данной Кирхгофом (см. § 43). Этот принцип сводит только любую дифракционную задачу к определению волнового поля на произвольной замкнутой поверхности F , окружающей все источники света (рис. 150). Но точное определение поля на поверхности F возможно лишь после нахождения его во всем пространстве. Эту трудность Френель преодолел введением специальной гипотезы, которой мы, в сущности, уже пользовались в предыдущем параграфе. Сформулируем ее на примере непрозрачного плоского экрана с отверстиями, поставленного на пути распространяющейся волны.

Выберем в качестве вспомогательной поверхности F заднюю (т. е. неосвещаемую) сторону экрана. Примем, что на всех участках этой поверхности, которые прикрыты экраном, волновое поле равно нулю, а на отверстиях определяется приближенными законами геометрической оптики, т. е. такое, какое получилось бы в отсутствие экрана. Тем самым интегрирование в (39.1) распространяется только на отверстия, где волновое поле считается известным. Отметим недостатки введенной гипотезы.

1) Распространение гипотезы на неплоские экраны неоднозначно, так как в этом случае неясно, как провести вспомогательную поверхность через отверстия экрана.

2) Гипотеза противоречива. Если с помощью принципа Гюйгенса вычислить волновое поле во всем пространстве, то на поверхности F оно не совпадает с исходным полем, принятым при вычислении. На задних сторонах экранов вычисленное поле не обратится в нуль, а на отверстиях не будет совпадать с полем свободно распространяющейся волны.

3) Гипотеза допускает разрыв волнового поля на краях отверстий, что противоречит граничным условиям электродинамики Максвелла.

4) Гипотеза противоречит поперечности световых волн. Это противоречие не устраняется заменой скалярных колебаний векторными. Колебания, как и при изучении явлений интерференции, мы считали скалярными лишь ради простоты. При переходе к векторным колебаниям математическая формулировка принципа Гюйгенса и полученные из него результаты по существу не изменятся. Как

строго показал Кирхгоф, для этого достаточно только скаляр E всюду заменить вектором E .

Допустим теперь, что на непрозрачный экран с отверстием нормально падает плоская линейно поляризованная электромагнитная волна. На вспомогательной поверхности F вектор E будет иметь одно и то же направление, параллельное плоскости экрана. Принцип Гюйгенса сводит задачу о дифракции к суперпозиции коллинеарных векторных колебаний того же направления. Поэтому следует ожидать, что в дифрагированной волне вектор E всюду будет параллелен плоскости экрана. Это будет так и вдали от экрана, где дифрагированные волны разных направлений расходятся и перестают накладываться друг на друга. Так будет и в волне, дифрагировавшей косо к плоскости экрана. Но в действительности вектор E перпендикулярен к дифрагирующим лучам и образует с вычисленным направлением угол, равный «углу дифракции» ϑ (рис. 163).

Метод Френеля решения дифракционных задач может быть оправдан, когда размеры отверстий и непрозрачных промежутков между ними велики по сравнению с длиной световой волны, а потому заметная интенсивность света наблюдается лишь при малых углах дифракции. Действительно, в отверстиях законы геометрической оптики нарушаются лишь в непосредственной близости от их краев. Применяя гипотезу Френеля, мы при вычислении интеграла (39.1) пользуемся неправильными значениями подинтегральной функции только внутри узких полосок вблизи краев отверстий. Ширина этих полосок порядка длины световой волны. В основной области интегрирования используются правильные значения подинтегрального выражения. Автоматически снимается и возражение (4), связанное с поперечностью световых колебаний, так как различие направлений вычисленного и действительного полей при малых углах дифракции можно пренебречь. Все это в основном подтверждается совпадением результатов теоретических расчетов с опытом. Но для малых препятствий, сравнимых с длиной волны, и, следовательно, для больших углов дифракции гипотезой Френеля уже нельзя пользоваться.

Отметим еще, что гипотеза Френеля приводит к выводу о независимости дифрагированной волны от материала экрана. Этот вывод в основном также подтверждается опытом. Только более точные опыты обнаруживают и влияние материала экрана на дифракцию света.

2. Явления дифракции принято классифицировать в зависимости от расстояний источника и точки наблюдения (экрана) от препятствия, поставленного на пути распространения света. Если

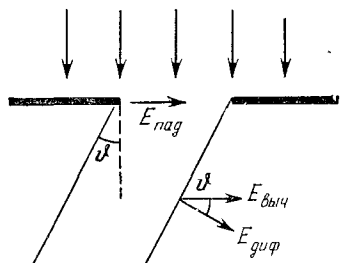


Рис. 163.

эти расстояния очень велики (бесконечно велики), то дифракция называется *дифракцией в параллельных лучах* или *дифракцией Фраунгофера* (1787—1826). В противоположном случае говорят о *дифракции в непараллельных лучах* или *дифракции Френеля*. Практически для осуществления дифракции Фраунгофера точечный источник света помещают в фокусе собирающей линзы. Получающийся параллельный пучок света дифрагирует на каком-то препятствии. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы, поставленной на пути дифрагированного света, или в зрительную трубу, установленную на бесконечность. Ясно, что между фраунгоферовой и френелевой дифракцией нет принципиального различия и резкой границы. Одна непрерывно переходит в другую.

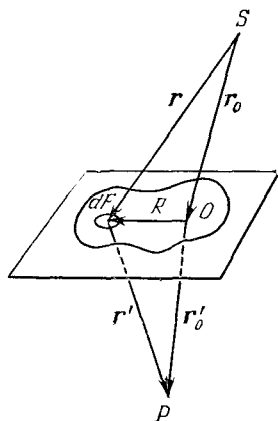


Рис. 164.

Для лучшего уяснения приведенной классификации начнем с примера. Рассмотрим круглое отверстие и точечный источник на его оси. Пусть сначала точка наблюдения также находится на оси. Если в отверстии укладывается небольшая часть первой зоны Френеля, то дифракция будет фраунгоферовой. В этом случае все колебания в плоскости отверстия совершаются и приходят в точку наблюдения практически в одинаковых фазах. При смещении точки наблюдения вбок появляются разности фаз между вторичными волнами, приходящими в точку наблюдения от различных точек отверстия. Этим и обусловлено появление дифракционных колец. Если отверстие заменить непрозрачным экраном, то этот случай, по соображениям, которые выяснятся в пункте 4, также относят к дифракции Фраунгофера. Если же в отверстии или экране (для точки наблюдения, лежащей на оси системы) укладывается заметная часть первой зоны или несколько зон Френеля, то дифракция считается френелевой.

3. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть препятствием является непрозрачный экран с отверстием (рис. 164), S — точечный источник монохроматического света, P — точка наблюдения. За начало координат примем произвольную точку O в плоскости отверстия. По принципу Гюйгенса — Френеля волновое поле в точке P представляется интегралом

$$E_P = \int \frac{1}{rr'} e^{i\Phi(R)} dF, \quad (41.1)$$

где $\Phi = \omega t - k(r + r')$. Ввиду малости углов дифракции в подынтегральном выражении (41.1) опущен множитель $K(\alpha)$, определяю-

щий зависимость поля вторичной волны от направления ее излучения. Знаменатель rr' можно считать постоянным, так как размеры отверстия предполагаются очень малыми как по сравнению с r , так и по сравнению с r' . Но зависимость фазы Φ от радиуса-вектора \mathbf{R} , определяющего положение элемента площади dF , конечно, должна быть учтена, так как фаза быстро меняется уже на малых расстояниях (порядка ширины френелевой зоны). Интегрирование в (41.1) во всех случаях выполняется по практически небольшому числу (не более нескольких десятков) полных или неполных зон Френеля (см., например, следующий параграф). Если расстояния r_0 и r'_0 настолько велики, что разложение фазы $\Phi(\mathbf{R})$ по степеням \mathbf{R} можно оборвать на членах первой степени, то такие расстояния можно считать бесконечно большими. В этом случае имеет место дифракция Фраунгофера. Если же такая точность недостаточна, то дифракция будет френелевой. Обычно в случае френелевой дифракции разложение фазы $\Phi(\mathbf{R})$ по степеням \mathbf{R} достаточно оборвать на членах второй степени.

Найдем количественный критерий, при выполнении которого в фазе Φ можно пренебречь квадратичными членами и, следовательно, считать дифракцию фраунгоферовой. Как видно из рис. 164, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R}$, откуда

$$r^2 = r_0^2 + 2(\mathbf{r}_0\mathbf{R}) + R^2.$$

Извлекая квадратный корень с точностью до квадратичных членов включительно, получим

$$r = r_0 + (\mathbf{s}\mathbf{R}) + \frac{1}{2r_0}[R^2 + (\mathbf{s}\mathbf{R})^2],$$

где через \mathbf{s} обозначен единичный вектор $\mathbf{s} = \mathbf{r}_0/r_0$. Аналогично вычисляется расстояние r' . В результате получаем

$$\Phi = \omega t - k(r_0 + r'_0) + k(\mathbf{s} - \mathbf{s}')\mathbf{R} + \frac{k}{2}\left[\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r'_0}\right)R^2 + \frac{1}{r_0}(\mathbf{s}\mathbf{R})^2 + \frac{1}{r'_0}(\mathbf{s}'\mathbf{R})^2\right]. \quad (41.2)$$

В отличие от постоянного вектора \mathbf{s} , единичный вектор $\mathbf{s}' = \mathbf{r}'_0/r'_0$ меняется при изменении положения точки наблюдения. Этим и обусловлено появление дифракционных картин, т. е. изменение интенсивности светового поля от точки к точке. Слагаемое $-k(r_0 + r'_0)$ не играет роли. Оно вносит в выражение для E_P только постоянный фазовый множитель $e^{-ik(r_0 + r'_0)}$, не влияющий на интенсивность светового поля в точке P . Квадратичные члены имеют порядки

$$kR^2/r_0 = 2\pi R^2/(\lambda r_0) \quad \text{и} \quad kR^2/r'_0 = 2\pi R^2/(\lambda r'_0).$$

Максимальные значения эти величины принимают при $R = D$, где D — диаметр отверстия. Практически этими членами можно

пренебречь, если они меньше $\pi/2$. Действительно, характерной величиной для фазы является $\pi/2$, так как при изменении углов на такую величину синусы и косинусы претерпевают существенные изменения. Все слагаемые в фазе, много меньшие $\pi/2$, не играют роли и могут быть отброшены без особого ущерба для точности. Для максимальных изменений, обусловленных квадратичными членами, мы (несколько условно) заменим требование «много меньше» более слабым требованием «меньше». Таким путем получим

$$r_0 > \frac{4D^2}{\lambda}, \quad r'_0 > \frac{4D^2}{\lambda}. \quad (41.3)$$

Этими условиями и определяется область фраунгоферовой дифракции. Например, если $D = 1$ мм, $\lambda = 500$ нм, то фраунгоферова дифракция наступает при $r_0, r'_0 > 4D^2/\lambda = 8$ м.

Легко также написать условия, при которых разложение фазы $\Phi(R)$ можно оборвать на членах второй степени:

$$r_0 > \sqrt{4D^3/\lambda}, \quad r'_0 > \sqrt{4D^3/\lambda}. \quad (41.4)$$

В приведенном примере они удовлетворяются при $r_0, r'_0 > 9$ см. Впрочем, квадратичным приближением (41.2) пользуются даже тогда, когда условия (41.4) не выполняются. Это делается при вычислении интеграла (41.1) в несущественных частях области интегрирования, где точное знание фазы Φ не имеет значения. Пример такого рода будет приведен в следующем параграфе при рассмотрении дифракции на прямолинейном крае экрана.

Теперь становится качественно ясным, как ведет себя световой пучок, прошедший через диафрагму, на различных расстояниях r от нее. Для определенности будем считать, что диафрагма освещается параллельным пучком света. На малых расстояниях $r \ll \ll D^2/\lambda$ приближенно применима геометрическая оптика (прямолинейное распространение света). Затем с увеличением расстояния r наблюдается сложная картина френелевой дифракции. На больших расстояниях $r \gg D^2/\lambda$ дифракционная картина упрощается и переходит в дифракцию Фраунгофера.

4. Следствием гипотезы Френеля является полезная *теорема Бабиня* (1794—1872) о свойствах так называемых *дополнительных экранов*. Возьмем плоский экран, освещаемый каким-либо источником света. Пусть $E_{\text{вх}}$ — поле падающей волны, какое получилось бы в точке (x, y) на передней поверхности экрана при отсутствии последнего, а $E_{\text{вых}}$ — поле в той же точке на задней поверхности экрана (экран предполагается тонким, и его толщина не играет роли). Пусть эти поля связаны соотношением $E_{\text{вых}} = \alpha_1 E_{\text{вх}}$. Коэффициент α_1 называется *пропускаемостью экрана*. Он может зависеть от координат x, y , структуры экрана и длины волны, но не зависит от напряженности волнового поля. Для другого экрана той же геометрической формы $E_{\text{вых}} = \alpha_2 E_{\text{вх}}$. Эти два экрана называются

дополнительными, если $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Примером могут служить два непрозрачных экрана с отверстиями, причем отверстия одного экрана совпадают с непрозрачными частями другого. Согласно (41.1), волновые поля в точке наблюдения при использовании дополнительных экранов могут быть записаны в виде

$$E_P^{(1)} = \int \frac{\alpha_1}{rr'} E_{\text{вх}} e^{i\Phi} dF, \quad E_P^{(2)} = \int \frac{\alpha_2}{rr'} E_{\text{вх}} e^{i\Phi} dF,$$

причем в обоих случаях интегрирование распространяется по всей поверхности экрана. (Для определенности источник света предполагается точечным, что не имеет никакого значения.) Сложив эти два выражения и учтя, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, получим

$$E_P^{(1)} + E_P^{(2)} = \int \frac{1}{rr'} E_{\text{вх}} e^{i\Phi} dF.$$

Но последний интеграл есть поле E_P в точке P , которое получилось бы при свободном распространении волны. Таким образом,

$$E_P^{(1)} + E_P^{(2)} = E_P. \quad (41.5)$$

Эта формула и выражает теорему Бабинне в ее наиболее общей форме.

Обычно теорема Бабинне понимается в более узком смысле — применительно к случаю фраунгоферовой дифракции. Пусть фраунгоферова дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы. Если бы на пути параллельных лучей не было препятствий, то световое поле в этой плоскости было бы всюду равно нулю, за исключением фокуса линзы. Таким образом, согласно (41.5), во всякой точке фокальной плоскости, за исключением фокуса, должно быть $E_P^{(1)} + E_P^{(2)} = 0$. Так как интенсивность света I пропорциональна $|E_P|^2$, то отсюда получаем

$$I_1 = I_2. \quad (41.6)$$

Следовательно, поскольку наблюдению доступна только интенсивность светового поля, а не его фаза, *фраунгоферовы дифракционные картины от дополнительных экранов, получаемые в фокальной плоскости линзы, всюду одинаковы, за исключением самого фокуса.*

ЗАДАЧА

На черный экран падает плоская световая волна. Из-за дифракции за экраном, наряду с неотклоненной волной, появятся волны всевозможных направлений (рассеянный свет). Показать, что количество рассеянной энергии равно количеству энергии, поглощенному экраном.

Решение. Заменяем экран дополнительным, т. е. отверстием той же величины и формы. От этого по теореме Бабинне интенсивность светового поля в бесконечности сохранится неизменной во всех направлениях, за исключением направления первичной волны. Но на любое строго фиксированное направление за отверстием приходится нулевая интенсивность света, так как отверстие рассеи-

вает весь падающий на него свет. С другой стороны, экран по предположению полностью поглощает весь падающий свет. Отсюда непосредственно получается требуемый результат. Разумеется, он применим только в тех случаях, когда размеры экрана очень велики по сравнению с длиной волны.

§ 42. Зоны Шустера и спираль Корню

1. В одномерных задачах, например при рассмотрении дифракции на прямоугольной щели, разбиение волнового фронта на кольцевые зоны нецелесообразно. Лучше разбивать волновой фронт на *полосатые зоны*, называемые *зонами Шустера* (1851—1934). Ограничимся случаем, когда волновой фронт плоский, хотя обобщение на случай сферического фронта и не встречает никаких затруднений. Пусть плоскость волнового фронта AB перпендикулярна к плоскости рис. 165. Обозначим через b длину перпендикуляра PO , опущенного из точки наблюдения на волновой фронт.

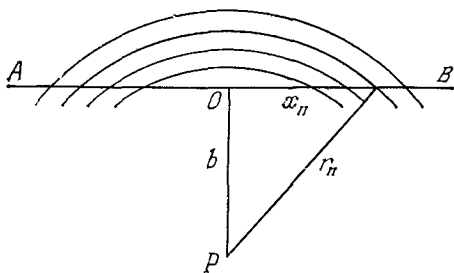


Рис. 165.

Проведем цилиндрические коаксиальные поверхности, ось которых проходит через точку P перпендикулярно к плоскости рисунка, а радиусы равны b , $b + \lambda/2$, $b + 2(\lambda/2)$, ... Тогда волновой фронт разобьется на прямоугольные полосы, которые и называются зонами Шустера. Центральную зону условимся считать за две зоны: одна расположена справа, а другая слева от точки O . Тогда $r_n^2 = b^2 + x_n^2$, $r_{n-1}^2 = b^2 + x_{n-1}^2$, а потому $r_n^2 - r_{n-1}^2 = x_n^2 - x_{n-1}^2$. Приблизительно

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 = (r_n + r_{n-1})(r_n - r_{n-1}) = 2b(\lambda/2) = b\lambda.$$

Таким образом, получаем рекуррентное соотношение

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = b\lambda, \quad (42.1)$$

из которого могут быть найдены все x_n . Так как $x_0 = 0$, то

$$x_1 = \sqrt{b\lambda}, \quad x_2 = \sqrt{2b\lambda}, \quad \dots, \quad x_n = \sqrt{nb\lambda}. \quad (42.2)$$

Ширины последовательных зон Шустера будут

$$\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{2} - 1)\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{b\lambda}, \quad \dots \quad (42.3)$$

Они монотонно убывают и в пределе, когда $r \rightarrow \infty$, стремятся к $\lambda/2$, как это ясно из их построения. (Впрочем, высшие зоны не играют роли. Имеют значение только несколько десятков первых зон Шустера.)