

вает весь падающий на него свет. С другой стороны, экран по предположению полностью поглощает весь падающий свет. Отсюда непосредственно получается требуемый результат. Разумеется, он применим только в тех случаях, когда размеры экрана очень велики по сравнению с длиной волны.

## § 42. Зоны Шустера и спираль Корню

1. В одномерных задачах, например при рассмотрении дифракции на прямоугольной щели, разбиение волнового фронта на кольцевые зоны нецелесообразно. Лучше разбивать волновой фронт на *полосатые зоны*, называемые *зонами Шустера* (1851—1934). Ограничимся случаем, когда волновой фронт плоский, хотя обобщение на случай сферического фронта и не встречает никаких затруднений. Пусть плоскость волнового фронта  $AB$  перпендикулярна к плоскости рис. 165. Обозначим через  $b$  длину перпендикуляра  $PO$ , опущенного из точки наблюдения на волновой фронт.

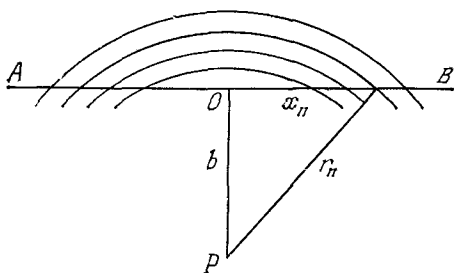


Рис. 165.

Проведем цилиндрические коаксиальные поверхности, ось которых проходит через точку  $P$  перпендикулярно к плоскости рисунка, а радиусы равны  $b$ ,  $b + \lambda/2$ ,  $b + 2(\lambda/2)$ , ... Тогда волновой фронт разобьется на прямоугольные полосы, которые и называются зонами Шустера. Центральную зону условимся считать за две зоны: одна расположена справа, а другая слева от точки  $O$ . Тогда  $r_n^2 = b^2 + x_n^2$ ,  $r_{n-1}^2 = b^2 + x_{n-1}^2$ , а потому  $r_n^2 - r_{n-1}^2 = x_n^2 - x_{n-1}^2$ . Приблизительно

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 = (r_n + r_{n-1})(r_n - r_{n-1}) = 2b(\lambda/2) = b\lambda.$$

Таким образом, получаем рекуррентное соотношение

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = b\lambda, \quad (42.1)$$

из которого могут быть найдены все  $x_n$ . Так как  $x_0 = 0$ , то

$$x_1 = \sqrt{b\lambda}, \quad x_2 = \sqrt{2b\lambda}, \quad \dots, \quad x_n = \sqrt{nb\lambda}. \quad (42.2)$$

Ширины последовательных зон Шустера будут

$$\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{2} - 1)\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{b\lambda}, \quad \dots \quad (42.3)$$

Они монотонно убывают и в пределе, когда  $r \rightarrow \infty$ , стремятся к  $\lambda/2$ , как это ясно из их построения. (Впрочем, высшие зоны не играют роли. Имеют значение только несколько десятков первых зон Шустера.)

Как и в случае зон Френеля, применим теперь графический метод (рис. 153). Каждую зону Шустера разобьем на узкие полоски и будем изображать колебание в точке  $P$ , вносимое отдельной полоской, вектором на векторной диаграмме. Затем перейдем к пределу, устремляя к нулю ширину каждой полоски. В результате получится плавная кривая, называемая спиралью Корню (1841—1902) (рис. 166). Она состоит из двух симметричных ветвей, бесконечное число раз обвивающихся вокруг «фокусов»  $F$  и  $F'$  и неограниченно приближающихся к ним. Верхняя ветвь представляет действие правой половины волнового фронта, нижняя — левой. Отличие

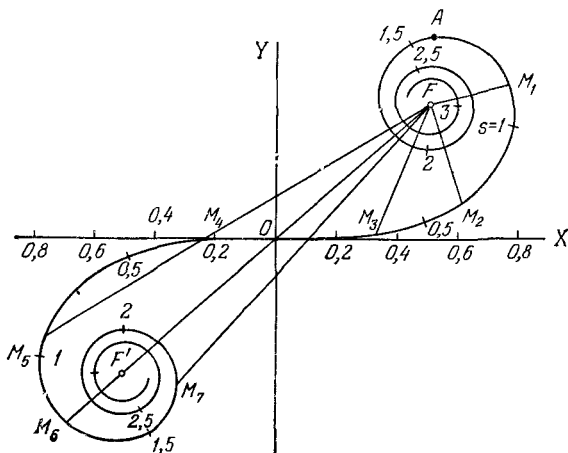


Рис. 166.

каждой из ветвей от соответствующей спирали на рис. 153 обусловлено более быстрым убыванием начальных зон Шустера, чем зон Френеля. Колебание, возбуждаемое первой правой зоной Шустера, изображается вектором  $\overline{OA}$ , второй правой — вектором  $\overline{A2}$ , двумя первыми правыми зонами вместе — вектором  $\overline{O2}$  и т. д. (все эти векторы на рис. 166 не проведены). Колебание, возбуждаемое всем волновым фронтом, представляется вектором  $\overline{F'F}$ , соединяющим фокусы спирали Корню. По мере приближения к фокусам амплитуды колебаний становятся все меньше и меньше и в пределе обращаются в нуль.

2. При нахождении уравнения спирали Корню надо учесть, что реально всегда приходится иметь дело не с бесконечными, а с ограниченными волновыми фронтами, причем заметная интенсивность наблюдается лишь при малых углах дифракции. Поэтому в формуле (41.1) изменения знаменателей  $r$  и  $r'$  (а также уже отброшенных ранее ослабляющих множителей  $K(\alpha)$ ) можно

не принимать во внимание. Если нас интересует только относительное распределение интенсивности, то можно положить  $rr' = 1$ . В плоскости волнового фронта фазу можно представить в виде  $\Phi = \omega t - kr$  (здесь произведено переобозначение: в формуле (41.1) расстояние  $r$  обозначалось через  $r'$ ).

Примем волновой фронт за координатную плоскость  $XU$ , а начало координат поместим в точке  $O$ . Тогда  $r^2 = b^2 + (x^2 + y^2)$ , а следовательно,  $r - b = (x^2 + y^2)/(2b) + \dots$  Члены высших степеней можно отбросить, если даже они добавляют в фазу слагаемые порядка  $\pi$  и больше. Дело в том, что такие члены, как это видно из формы спирали Корню, не меняя общего характера дифракционной картины, производят в ней только практически незаметные смещения высших дифракционных максимумов и минимумов. Кроме того, высшие дифракционные максимумы и минимумы следуют друг за другом столь часто, что для их реального осуществления требуются точечные источники света высокой степени монохроматичности. В противном случае все дифракционные полосы высших порядков размываются и переходят в равномерно освещенный фон. Отбросим все фазовые множители, не влияющие на относительное распределение интенсивности светового поля. Тогда поле в точке наблюдения  $P$  представится интегралом

$$E_P = \iint e^{-ik(x^2 + y^2)/(2b)} dx dy.$$

Интегрирование должно быть выполнено по всей открытой поверхности волнового фронта. Допустим, что в направлении оси  $U$  она простирается достаточно далеко в обе стороны. Тогда интегрирование по  $y$  можно выполнить в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , в результате чего появится постоянный множитель, не представляющий интереса. Интегрирование по  $x$  произведем от нуля, считая верхний предел  $x$  переменным (он может быть и положительным, и отрицательным). Вместо  $x$ , как это принято, введем новую переменную  $s$  по формуле  $kx^2/b = \pi s^2$ . Тогда

$$E_P = \int_0^s e^{-i\pi s^2/2} ds, \quad (42.4)$$

$$E_P^* = \int_0^s e^{i\pi s^2/2} ds. \quad (42.5)$$

При изображении колебаний можно пользоваться как выражением (42.4), так и комплексно сопряженным с ним (42.5). При построении спирали Корню обычно применяют выражение (42.5). Оно и представляет уравнение спирали Корню в комплексной форме. Если координатные оси выбраны так, как указано на рис. 166, то в прямоугольных координатах уравнение спирали Корню

запишется в виде

$$X(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds, \quad Y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds. \quad (42.6)$$

Входящие сюда интегралы называются *интегралами Френеля*. Очевидно,

$$X(s) = -X(-s), \quad Y(s) = -Y(-s),$$

т. е. кривая (42.6) симметрична относительно начала координат.

Полагая  $s = \infty$ , находим координаты фокусов спирали Корню:

$$X_F = Y_F = 1/2, \quad X_{F'} = Y_{F'} = -1/2.$$

Впрочем, для многих целей проще пользоваться непосредственно комплексной формой (42.5). В частности, для дифференциала дуги спирали Корню из (42.5) находим:  $|e^{i\pi s^2/2} ds| = |ds|$ . Отсюда следует, что параметр  $s$  есть длина дуги спирали, отсчитываемая от начала координат  $O$ .

Если  $\tau$  — угол между касательной к спирали Корню и осью  $X$ , то  $\operatorname{tg} \tau = dY/dX = \operatorname{tg}(\pi s^2/2)$ , а потому

$$\tau = \pi s^2/2. \quad (42.7)$$

При  $s = 0$  угол  $\tau = 0$ , т. е. в начале координат кривая касается оси  $X$ . При  $s = 1$  касательная вертикальна и идет вверх. При  $s = \sqrt{2}$ ,  $\tau = \pi$  касательная снова горизонтальна, но идет в отрицательном направлении оси  $X$ . При  $s = \sqrt{3}$ ,  $\tau = 3/2\pi$  она вертикальна и идет вниз. При  $s = 2$ ,  $\tau = 2\pi$  касательная принимает исходное — горизонтальное — направление. Формула (42.7) позволяет наглядно проследить, как кривая обвивается вокруг фокусов  $F$  и  $F'$ , делая при этом бесконечное число оборотов. Эта формула особенно полезна в том отношении, что она позволяет по заданному параметру  $s$  легко находить соответствующую точку на спирали Корню.

Из формулы (42.7) получаем формулу для кривизны спирали Корню:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\tau}{ds} = \pi s. \quad (42.8)$$

Длина всей спирали Корню бесконечна, а потому при приближении к фокусам ее кривизна стремится к бесконечности.

3. При работе со спиралью Корню надо знать значение параметра  $s$ . Его легко найти, зная на экране расстояние  $x$  точки наблюдения от центра картины  $O$  (рис. 165). Вычислив ширину первой зоны Шустера  $\sqrt{\lambda b}$ , находим далее  $s = x \sqrt{2/(\lambda b)}$ .

Рассмотрим в качестве примера дифракционную картину от прямолинейного края экрана (рис. 167). Где бы ни находилась точка наблюдения  $P$ , для нее всегда будет открыт правый край волнового

фронта. На векторной диаграмме (рис. 166) колебание в точке наблюдения представится вектором  $\overline{M_n F}$ , конечная точка которого всегда находится в верхнем фокусе  $F$ , а начальная  $M_n$  лежит где-то на спирали Корню. Если, сохраняя неизменным положение конечной точки  $F$ , перемещать начальную точку  $M_n$  вдоль спирали Корню (положения  $M_1, M_2, M_3, \dots$ ), то таким путем можно получить распределение амплитуд и интенсивности колебаний света по всему экрану.

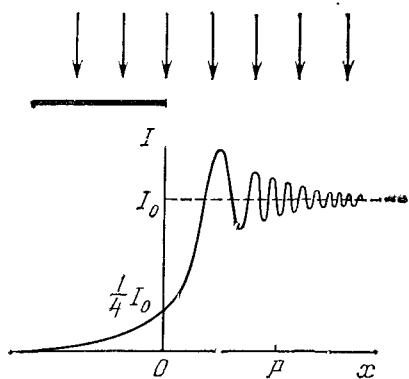


Рис. 167.

Обозначим через  $a_0 = |FF'|$  и  $I_0 = a_0^2$  амплитуду и интенсивность волны, когда открыт весь волновой фронт. Когда точка наблюдения  $P$  находится на границе геометрической тени, то колебание представится вектором  $\overline{OF} = \frac{1}{2}\overline{F'F}$ . Ему соответствует амплитуда  $\frac{1}{2}a_0$  и интен-

сивность  $\frac{1}{4}I_0$ . При перемещении точки  $P$  в освещенную область экрана изображающая точка  $M_n$  начнет перемещаться по нижней ветви спирали Корню, а амплитуда и интенсивность колебаний будут последовательно проходить через максимумы и минимумы. Максимальная амплитуда, как видно из рис. 166, составляет  $1,12 a_0$ , а интенсивность  $1,25I_0$ . Минимальные значения

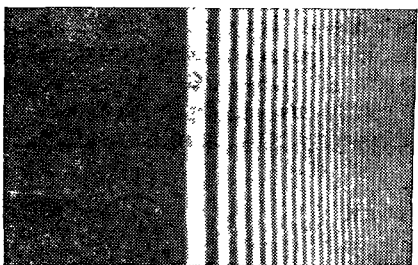


Рис. 168.

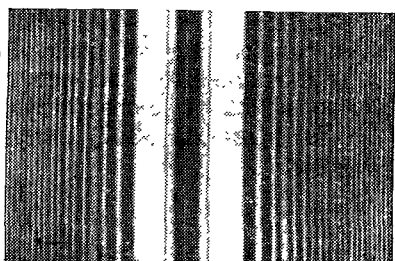


Рис. 169.

их соответственно  $0,89a_0$  и  $0,78I_0$ . При дальнейшем продвижении в освещенную область интенсивность асимптотически приближается к  $I_0$ . При погружении точки  $P$  в область геометрической тени изображающая точка  $M_n$  перемещается по верхней ветви спирали Корню. При этом по мере погружения в указанную область интенсивность света монотонно убывает и асимптотически стремится к нулю.

Распределение интенсивности графически представлено на рис. 167. Таким образом, нет резкой границы между светом и тенью: в области геометрической тени интенсивность света убывает непрерывно и монотонно, а освещенная область расщепляется в дифракционные полосы. На рис. 168 показана дифракционная картина, наблюдаемая при дифракции света на крае экрана. Таким же путем можно рассчитать дифракционную картину на щели или длинном прямоугольном экране. На рис. 169 показана тень проволоки от точечного (или линейного) источника.

### ЗАДАЧИ

1. Положение светлых и темных полос при дифракции плоской волны на крае экрана можно приближенно (но с достаточной точностью) определить по точкам пересечения нижней ветви спирали Корню с прямой  $F'F$ , соединяющей ее фокусы, приняв во внимание, что в этих точках прямая  $FF'$  практически перпендикулярна к спирали Корню. Найти таким путем координаты указанных полос.

О т в е т,

$$x_n = 1/2 \sqrt{\lambda r (8n - 5)} \quad (\text{светлые полосы}),$$

$$x_n = 1/2 \sqrt{\lambda r (8n - 1)} \quad (\text{темные полосы}),$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$

2. Когда звезда проходит мимо края Луны, получаются дифракционные голосы. Определить скорость их движения  $v$  по земной поверхности и оценить порядок их ширины  $\Delta x$ . Для наблюдения полос можно воспользоваться телескопом, в фокусе которого помещен фотозлемент. Полосы, проходя перед объективом телескопа, возбуждают переменные электрические токи, которые могут быть усилены и с помощью осциллографа записаны на движущейся ленте. Оценить длительность  $t$  прохождения полос перед объективом.

Принимая звезду за равномерно светящийся диск, можно теоретически рассчитать распределение освещенности в дифракционной картине. Сравнивая его с распределением освещенности, найденным экспериментально, можно определить угловой диаметр звезды, что и было фактически выполнено в 1946 г. Уайтфордом для четырех звезд на стодюймовом рефлекторе Маунт-Вильсоновской обсерватории. Оценить угловые размеры звезд, для которых может быть пригоден этот метод.

О т в е т,  $v \approx 500$  м/с;  $\Delta x \sim \sqrt{b\lambda} \approx 10$  м, где  $b = 3,8 \cdot 10^5$  км — среднее расстояние до Луны. Метод пригоден, когда угловые размеры звезд лежат примерно в интервале от  $10^{-4}$  до  $10^{-3}$  угловой секунды.

3. Для получения фотографий дифракционных картин в тех случаях, когда источник света и экран расположены очень далеко, В. К. Аркадьевым (1884—1953) был применен *метод подобия*, в котором вместо действительных препятствий, стоящих на пути лучей, используются их уменьшенные и подобные модели, но длина волны сохраняется неизменной.

Требуется получить фотографию дифракционной картины от диска диаметром  $D = 50$  см, когда на его оси расположен точечный источник света на расстоянии  $A = 25$  км, а экран удален от него на  $B = 50$  км (плоскость экрана перпендикулярна к оси диска). С этой целью диск заменили уменьшенной моделью с диаметром  $d = 1$  см. Пользуясь методом зон Френеля, определить, на каких расстояниях  $a$  и  $b$  следует поместить источник света и экран, чтобы получилась подобная и уменьшенная в  $n = 50$  раз дифракционная картина.

О т в е т,  $a = A/n^2 = 10$  м,  $b = B/n^2 = 20$  м.