§ 43. Принцип Гюйгенса в формулировке Кирхгофа

1. До Кирхгофа принцип Гюйгенса — Френеля оставался гипотезой. Кирхгоф в 1883 г. вывел формулу, которую можно рассматривать как уточненную формулировку указанного принципа. Приведем вывод формулы Кирхгофа, хотя в дальнейшем и не будем ею пользоваться. Читатель может опустить его без ущерба для понимания дальнейшего.

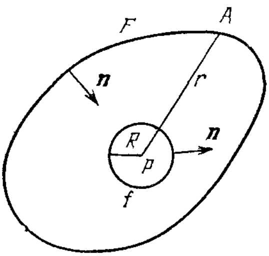

Рис. 170.

Допустим, что среда, в которой распространяется свет, однородна. Будем характеризовать световое поле какой-то величиной E. Под E можно понимать либо вектор $\boldsymbol{E}$, либо вектор $\boldsymbol{B}$, либо одну из их проекций на декартовы оси координат. Эта величина удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta E-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0,$$

которое в случае монохроматического поля переходит в

$$\Delta E+k^2E=0. \tag{43.1}$$

Найдем значение E в произвольной точке пространства P (рис. 170). Обозначим через r переменное расстояние какой-либо точки A от P. Величина

$$\chi=\frac{1}{r}e^{-ikr}, \tag{43.2}$$

рассматриваемая как функция точки A, также удовлетворяет уравнению

$$\Delta\chi+k^2\chi=0. \tag{43.3}$$

Окружим точку P произвольной замкнутой поверхностью F, и притом такой, что в окружаемом ею пространстве нет источников света. Функция χ обращается в бесконечность в точке P. Исключим эту точку, окружив ее сферой f достаточно малого радиуса R с центром в P. Тогда во всем пространстве между сферой f и поверхностью F функции E и χ, а также их производные будут конечны и непрерывны. К ним можно применить формулу Грина (1793—1841)

$$\int(E\,\Delta\chi-\chi\,\Delta E)\,dV=-\int\limits_{F+f}\left(E\frac{\partial\chi}{\partial n}-\chi\frac{\partial E}{\partial n}\right)dF, \tag{43.4}$$

где V — объем пространства между поверхностями f и F, а $\boldsymbol{n}$ — внутренняя нормаль по отношению к этому пространству. Так как в указанном пространстве источников света нет, то в нем справедливы уравнения (43.1) и (43.3). Следовательно,

$$E\,\Delta\chi-\chi\,\Delta E=-k^2(E\chi-\chi E)=0,$$

а потому

$$\oint\limits_f\left(E\frac{\partial\chi}{\partial n}-\chi\frac{\partial E}{\partial n}\right)df=-\oint\limits_F\left(E\frac{\partial\chi}{\partial n}-\chi\frac{\partial E}{\partial n}\right)dF.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу, устремляя радиус сферы f к нулю. Правая часть равенства при этом не будет меняться. Что касается левой, то, взяв радиус R настолько малым, чтобы $kR\ll 1$, можно заменить экспоненциальный множитель e^{-ikR} единицей. Тогда левая часть примет вид

$$\oint\limits_f\left[E\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial E}{\partial R}\right]df.$$

Так как величины E и $\frac{\partial E}{\partial R}$ в окрестности точки P конечны, то интеграл от второго слагаемого будет порядка $-4\pi R\,\frac{\partial E}{\partial R}$, т. е. при $R \to 0$ обратится в нуль. Интеграл же от первого слагаемого в пределе перейдет в $-4\pi E_P$. Окончательно

$$E_P=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_F\left[E\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)-\frac{e^{-ikr}}{r}\,\frac{\partial E}{\partial n}\right]dF\,, \tag{43.5}$$

где E_P — значение функции E в точке P.

2. Формула (43.5) по виду напоминает принцип Гюйгенса — Френеля. И тут и там поле в точке P выражается интегралом по замкнутой поверхности F. Однако у Френеля источники света лежат *внутри* замкнутой поверхности F, а точка P *вне* этой поверхности. Формула же (43.5), наоборот, предполагает, что точка P лежит *внутри* поверхности F, а источники *вне* ее. Легко, однако, преобразовать формулу (43.5), чтобы указанное различие исчезло. Для этого предположим, что все источники света S_1, S_2, S_3, ... лежат в конечной области пространства. Окружим эту область замкнутой поверхностью F (рис. 171). Пусть точка P находится в пространстве вне поверхности F. Опишем из P как из центра сферу f настолько большого радиуса, чтобы она целиком окружала поверхность F. Тогда в пространстве между f и F не будет источников света, а потому можно для вычисления E в точке P применить формулу (43.5):

$$E_P=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{F+f}\left(E\,\frac{\partial \chi}{\partial n}-\chi\,\frac{\partial E}{\partial n}\right)dF\,.$$

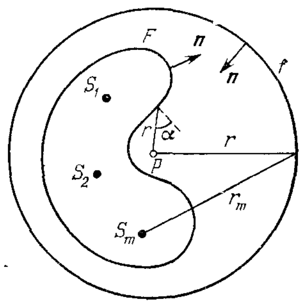

Рис. 171.

Докажем, что интеграл по сфере f стремится к нулю, когда ее радиус стремится к бесконечности. Для этого необходимо выяснить поведение функции E на бесконечности. Предположим, что в пространстве, ограниченном F, находится один или несколько точечных источников света: S_1, S_2, S_3, ... Тогда поле этих источников представится в виде

$$E=\sum C_m\,\frac{e^{-ikr_m}}{r_m}\,,$$

где C_m — постоянные коэффициенты. Если r стремится к ∞, то r_m также стремится к ∞, однако разность $r_m - r$ будет оставаться конечной. Представим E в виде

$$E=\sum C_m\,\frac{e^{-ik(r+a_m)}}{r+a_m}=\frac{e^{-ikr}}{r}\sum\frac{A_m}{1+a_m/r}\,,$$

где A_m — новые постоянные. Разлагая выражение под знаком суммы в ряд по степеням $1/r$, получим

$$E=\frac{e^{-ikr}}{r}\left\{\sum A_m-\frac{1}{r}\sum A_m a_m+\frac{1}{r^2}(\ldots)+\ldots\right\},$$

или

$$E=\frac{e^{-ikr}}{r}(C+\Phi)=(C+\Phi)\,\chi,$$

где C — постоянная, а Φ стремится к нулю по крайней мере как $1/r$. Подставляя это значение E в интеграл по сфере f, получим

$$\oint_f \left(E\frac{\partial\chi}{\partial n}-\chi\frac{\partial E}{\partial n}\right)df=-\oint_f \chi^2\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,df.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле стремится к нулю по крайней мере как $1/r^3$, тогда как поверхность сферы обращается в бесконечность как r^2. Поэтому при $r\to\infty$ весь интеграл стремится к нулю. Таким образом, если сферу f удалить в бесконечность, то получится

$$E_P=\frac{1}{4\pi}\oint_F\left[E\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)-\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial E}{\partial n}\right]dF. \tag{43.6}$$

Эти рассуждения приводят также к следующему важному результату. Если некоторый участок поверхности F удаляется в бесконечность, то часть интеграла (43.6) по этому участку стремится к нулю. При этом предполагается, что все источники света находятся в *конечной области пространства.*

3. Формулы (43.5) и (43.6) и выражают *принцип Гюйгенса в формулировке Кирхгофа.* В обеих формулах n означает внутреннюю нормаль по отношению к тому пространству, в котором находится точка наблюдения P.

Выполнив дифференцирование по n и приняв во внимание, что $\partial r/\partial n = -\cos\alpha$, где α — угол между нормалью n и направлением из площадки dF на точку P, получим

$$E_P=\oint K(\alpha,\ r)\frac{e^{-ikr}}{r}\,dF. \tag{43.7}$$

Здесь введено обозначение

$$K(\alpha,\ r)=\frac{1}{4\pi}\left[\left(ik+\frac{1}{r}\right)E\cos\alpha-\frac{\partial E}{\partial n}\right]. \tag{43.8}$$

Тем самым установлена связь формулы Кирхгофа с принципом Гюйгенса: подынтегральное выражение в формуле (43.8) может рассматриваться как *вторичная волна*, распространяющаяся от площадки dF к точке P. Множитель K, однако, зависит *не только от угла* α, как предполагал Френель, но также и *от расстояния* r. В противном случае вторичная волна не могла бы удовлетворять волновому уравнению. Таким образом, вторичные волны не обладают шаровой симметрией. Они сферические только в том смысле, что их волновые фронты имеют форму сфер. Амплитуды же зависят от направления распространения и меняются с расстоянием иначе, чем $1/r$. Только в «волновой зоне», когда расстояние точки P от излучающего центра dF очень велико по сравнению с длиной волны, можно в выражении (43.8) пренебречь $1/r$ по сравнению с ik. Тогда

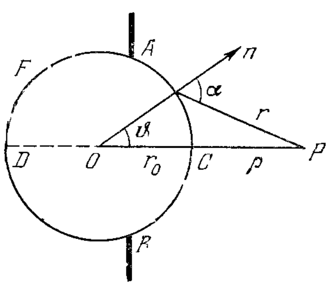

Рис. 172.

$$E_P=\frac{1}{4\pi}\oint\left(ikE\cos\alpha-\frac{\partial E}{\partial n}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\,dF. \tag{43.9}$$

Благодаря малости длин световых волн такой упрощенной формой принципа Гюйгенса в оптике можно пользоваться при решении всех конкретных задач.

4. Чтобы составить на примере более конкретное представление о вторичных волнах, рассмотрим свободное распространение сферической волны от то-

чечного источника. В качестве поверхности F возьмем сферу радиуса r_0 с центром в источнике O (рис. 172). Поле на поверхности F представим выражением

$$E_0 = \frac{e^{i(\omega t - kr_0)}}{r_0}.$$

Предполагая, что радиус r_0 очень велик по сравнению с длиной волны, отсюда найдем $\partial E/\partial n = \partial E_0/\partial r_0 = -ikE_0$. Подставляя это значение в формулу (43.9), получим

$$E_P = \frac{ik}{4\pi} \oint (1 + \cos\alpha) E_0 \frac{e^{-ikr}}{r} dF. \tag{43.10}$$

Сравнение этой формулы с формулой (43.7) дает

$$K(\alpha) = \frac{ik}{4\pi}(1 + \cos\alpha). \tag{43.11}$$

Это и есть «ослабляющий множитель» $K(\alpha)$, введенный в § 39 ad hoc. Из теории автоматически получается, что он чисто мнимый и с возрастанием α монотонно убывает по абсолютной величине. Он обращается в нуль при $\alpha = \pi$, т. е. в точке D сферы, диаметрально противоположной точке наблюдения P.

Интеграл (43.10) теперь можно вычислить, поскольку он не содержит никаких неизвестных функций. Произведем это вычисление, так как таким путем можно получить строгое обоснование метода зон Френеля и результатов, полученных этим методом. Взяв за переменную интегрирования r и использовав значение E_0, преобразуем интеграл (43.10) к виду

$$E_P = \int_{r_1}^{r_2} A(r) e^{-ikr} dr, \tag{43.12}$$

где введено обозначение

$$A(r) = \frac{ik(1 + \cos\alpha)}{2(\rho + r_0)} e^{i(\omega t - kr_0)}, \tag{43.13}$$

а через r_1 и r_2 обозначены наибольшее и наименьшее значения, принимаемые r. Интегрируя (43.12) по частям, получим

$$E_P = -\left.\frac{A(r) e^{-ikr}}{ik}\right|_{r_1}^{r_2} + \frac{1}{ik} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dA}{dr} e^{-ikr} dr. \tag{43.14}$$

Здесь единственной величиной, зависящей от r, является $\cos\alpha$. Найдем ее производную. Из рис. 172 $(\rho + r_0)^2 = r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos\alpha$, откуда $\frac{d\cos\alpha}{dr} = -\left(\frac{1}{r_0} + \frac{\cos\alpha}{r}\right)$. Взяв от (43.13) логарифмическую производную по r и воспользовавшись предыдущей формулой, найдем

$$\frac{1}{ik}\frac{dA}{dr} = \frac{i}{1 + \cos\alpha}\left(\frac{1}{kr_0} + \frac{\cos\alpha}{kr}\right) A(r).$$

Такой величиной, а следовательно, и интегралом в формуле (43.14) следует пренебречь, так как это уже было сделано при выводе исходной формулы (43.9). Таким образом, в формуле (43.14) остается только первое слагаемое, т. е.

$$E_P = \frac{A(r_1) e^{-ikr_1} - A(r_2) e^{-ikr_2}}{ik}. \tag{43.15}$$

Существенно, что величина E_P представляется разностью одной и той же функции, но при различных значениях аргумента r, причем при изменении r на $\lambda/2$ знак этой функции меняется на противоположный. Этого достаточно для обоснования основного результата (39.6), на котором основан метод зон Френеля. Действительно, применив формулу (43.15) к первой зоне Френеля, найдем, что действие этой зоны может быть представлено в виде $E_1 = (u_1 + u_2)$, действие второй зоны — в виде $E_2 = -(u_2 + u_3)$, и т. д. Явный вид выражений u_i для доказательства не имеет значения. Действие первых N зон выразится суммой

$$E=(u_1+u_2)-(u_2+u_3)+\ldots+(-1)^{N+1}(u_N+u_{N+1}),$$

т. е

$$E=u_1+(-1)^{N+1}u_{N+1}.$$

Так как по величине действия двух соседних зон почти одинаковы, то $u_{N+1} = u_N$. С той же степенью точности $^1/_2E_1 = u_1$, $^1/_2E_N = (-1)^{N+1}u_N = (-1)^{N+1}u_{N+1}$. Следовательно,

$$E=\frac{1}{2}(E_1+E_N).$$

§ 44. Дифракция Фраунгофера на щели

1. Дифракционные явления Фраунгофера имеют в оптике значительно большее практическое значение, чем дифракционные явления Френеля. При практическом осуществлении дифракции Фраунгофера источник света S помещается в фокусе линзы (рис. 173). (Линза L_1 не нужна, если источником света служит лазер, поскольку от него исходит уже параллельный пучок света.) Дифракция возникает на каком-либо препятствии AB, поставленном на пути световых лучей, прошедших через линзу L_1. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости другой линзы L_2. Ее можно также наблюдать в зрительную трубу, установленную на бесконечность. Но в теоретических рассуждениях удобнее от всех этих вспомогательных приспособлений отвлечься, предполагая, что на препятствие AB падает параллельный пучок лучей, а дифракция наблюдается «в бесконечности».

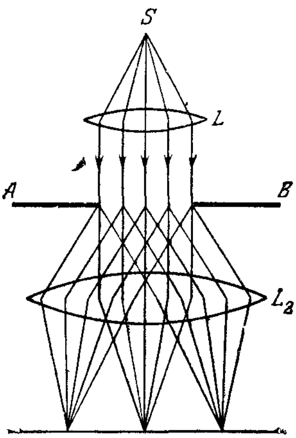

Рис. 173.

Простейшим для расчета и практически очень важным случаем является фраунгоферова дифракция на длинной прямоугольной щели. Ширину щели обозначим через b, ее длину будем считать бесконечной. Пусть на щель нормально падает плоская монохроматическая волна (рис. 174). Световое поле за щелью найдется по принципу Гюйгенса как результат интерференции когерентных вторичных волн, исходящих из различных точек волнового фронта на щели.