

этой функции меняется на противоположный. Этого достаточно для обоснования основного результата (39.6), на котором основан метод зон Френеля. Действительно, применив формулу (43.15) к первой зоне Френеля, найдем, что действие этой зоны может быть представлено в виде  $E_1 = (u_1 + u_2)$ , действие второй зоны — в виде  $E_2 = -(u_2 + u_3)$ , и т. д. Явный вид выражений  $u_i$  для доказательства не имеет значения. Действие первых  $N$  зон выразится суммой

$$E = (u_1 + u_2) - (u_2 + u_3) + \dots + (-1)^{N+1} (u_N + u_{N+1}),$$

т. е.

$$E = u_1 + (-1)^{N+1} u_{N+1}.$$

Так как по величине действия двух соседних зон почти одинаковы, то  $u_{N+1} = u_N$ .

С той же степенью точности  $1/2 E_1 = u_1$ ,  $1/2 E_N = (-1)^{N+1} u_N = (-1)^{N+1} u_{N+1}$ . Следовательно,

$$E = \frac{1}{2} (E_1 + E_N). \quad ;$$

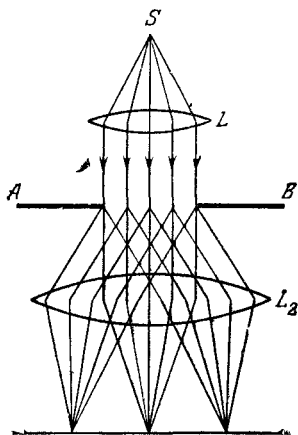
#### § 44. Дифракция Фраунгофера на щели

1. Дифракционные явления Фраунгофера имеют в оптике значительно большее практическое значение, чем дифракционные явления Френеля. При практическом осуществлении дифракции Фраунгофера источник света  $S$  помещается в фокусе линзы (рис. 173).

(Линза  $L_1$  не нужна, если источником света служит лазер, поскольку от него исходит уже параллельный пучок света.) Дифракция возникает на каком-либо препятствии  $AB$ , поставленном на пути световых лучей, прошедших через линзу  $L_1$ . Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости другой линзы  $L_2$ . Ее можно также наблюдать в зрительную трубу, установленную на бесконечность. Но в теоретических рассуждениях удобнее от всех этих вспомогательных приспособлений отвлекаться, предполагая, что на препятствие  $AB$  падает параллельный пучок лучей, а дифракция наблюдается «в бесконечности».

Простейшим для расчета и практически очень важным случаем является фраунгоферова дифракция на длинной прямоугольной щели. Ширину щели обозначим через  $b$ , ее длину будем считать бесконечной. Пусть на щель нормально падает плоская монохроматическая волна (рис. 174). Световое поле за щелью найдется по принципу Гюйгенса как результат интерференции когерентных вторичных волн, исходящих из различных точек волнового фронта на щели.

Рис. 173.



Вторичные волны, излучаемые полоской волнового фронта ширины  $dx$ , параллельной щели, складываясь, дают цилиндрическую волну, осью которой является эта полоска. Зависимость этой волны от направления ее распространения, определяемого углом  $\vartheta$ , можно не учитывать, так как задача решается методом Френеля, а потому угол дифракции  $\vartheta$  должен предполагаться малым. Однако необходимо учесть разности фаз между волнами, исходящими из различных полосок. Разумеется, речь идет о фазах колебаний на бесконечном расстоянии от щели. Волна, исходящая из  $dx$  под углом  $\vartheta$ , опережает по фазе волну того же направления, исходящую из середины щели  $O$ , на  $kx \sin \vartheta$ . Поэтому результирующее поле в бесконечности, создаваемое всей щелью, представится интегралом

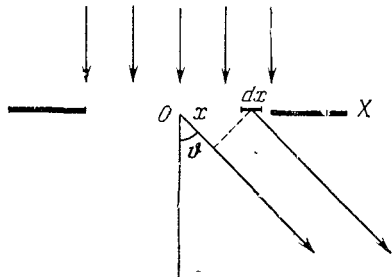


Рис. 174.

$$E = \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ikx \sin \vartheta} dx.$$

Здесь опущены все множители, не влияющие на относительное распределение волнового поля по направлениям. Вычислив интеграл, получим

$$E = b \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (44.1)$$

где введено обозначение

$$\alpha = \frac{kb \sin \vartheta}{2} = \frac{\pi b \sin \vartheta}{\lambda}. \quad (44.2)$$

Отсюда для распределения интенсивности света по направлениям найдем

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad (44.3)$$

где  $I_0$  — интенсивность в направлении падающей волны. На рис. 175 представлены графики функций  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$  (пунктирная кривая) и  $\left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$  (сплошная кривая). Обе функции обращаются в максимум, равный единице, при  $\alpha = 0$ . При  $\alpha = m\pi$ , где  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ , они равны нулю, т. е. в этих точках наблюдаются минимумы интенсивности. Между двумя соседними минимумами располагаются максимумы различных порядков. Их положения определяются трансцендентным уравнением  $\alpha \cos \alpha - \sin \alpha = 0$ . Практически

можно считать, что максимумы располагаются посередине между соседними минимумами.

2. Условие минимума  $\alpha = m\lambda$  можно также записать в виде

$$b \sin \vartheta = m\lambda. \quad (44.4)$$

Оно означает, что разность хода между волнами, исходящими от крайних точек щели, должна содержать целое число волн. Этот результат легко уяснить без всяких вычислений. Допустим сначала, что  $b \sin \vartheta = \lambda$ . Разобьем щель на две части одинаковой ширины. Тогда волны от этих частей придут в (удаленную) точку наблюдения

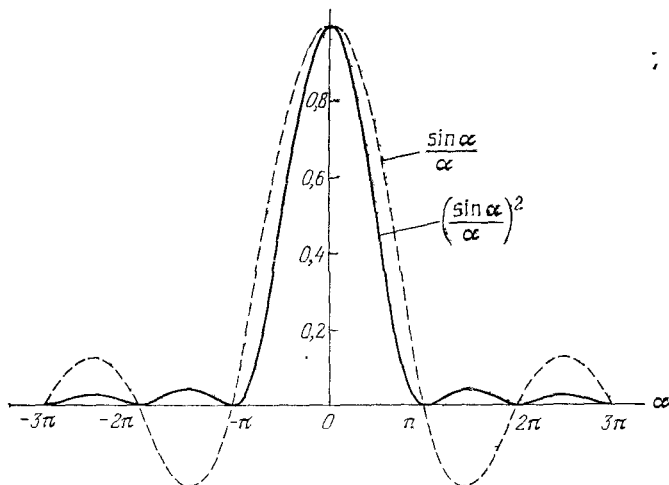


Рис. 175.

в противоположных фазах и погасят друг друга при интерференции, — получится минимум интенсивности. Если  $b \sin \vartheta = m\lambda$ , то разбиение щели надо произвести на  $2m$  частей одинаковой ширины. Волны от частей с нечетными номерами придут в фазах, противоположных фазам волн, пришедших от частей с четными номерами. А так как, ввиду симметрии, части щели, равноудаленные от противоположных краев ее, совершенно равноправны, то ясно, что эффект, вызванный нечетными частями, погасится при интерференции эффектом, вызванным четными частями.

Приведенное обоснование формулы (44.4) не только проще предыдущего, но, что особенно важно, и обладает большей общностью. Действительно, в предыдущем выводе щель должна предполагаться широкой ( $b \gg \lambda$ ), чтобы можно было применять приближенный метод Френеля. Последний же вывод использует только свойства симметрии щели и применим не только при малых, но и при любых углах дифракции  $\vartheta$ . Требуется только, чтобы было

$b > \lambda$ . В противном случае из условия (44.4) мы получили бы  $\sin \vartheta > 1$ , и все дифракционные минимумы с нулевой интенсивностью были бы невозможны.

3. Когда падающая волна плоская, то все дифрагированные лучи перпендикулярны к оси щели. Если на их пути поставить

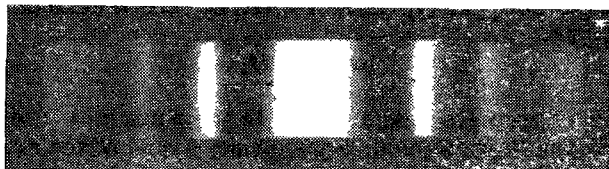


Рис. 176.

линзу, то каждый дифрагированный пучок параллельных лучей соберется в маленькое пятнышко. Такие пятнышки — максимумы и минимумы интенсивности — расположатся вдоль прямой, перпендикулярной к оси щели и лежащей в фокальной плоскости линзы. В этой плоскости и надо поместить экран для наблюдения.

Если в качестве источника света взять светящуюся линию или узкую освещаемую коллиматорную щель, параллельную щели, на которой происходит дифракция, то каждая точка источника даст на экране дифракционную картину, описанную выше. В результате наложения таких картин каждое дифракционное пятнышко вытянется в полоску. Образуется система дифракционных полос, показанная на рис. 176. Центральная полоса светлая и примерно вдвое шире остальных светлых и темных полос. Максимальный порядок минимума, который может наблюдаться, определяется условием  $\sin \vartheta < 1$ , т. е.  $m < b/\lambda$ , как это видно из формулы (44.4). Чем шире щель, тем ярче картина, тем уже дифракционные полосы, а число самих полос больше. При сужении щели картина расширяется, а ее яркость уменьшается. Когда  $b = \lambda$ , минимумы первого порядка получаются при  $\vartheta = \pi/2$  и исчезают при дальнейшем сужении щели.

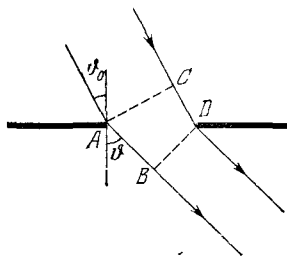


Рис. 177.

4. При наклонном падении света под углом  $\vartheta_0$  (рис. 177) разность хода между крайними интерферирующими лучами  $AB - CD$  составляет  $b(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0)$ . Поэтому условие дифракционного минимума (44.4) переходит в

$$b(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) = m\lambda. \quad (44.5)$$

Если углы  $\vartheta$  и  $\vartheta_0$  малы, то  $b(\vartheta - \vartheta_0) \approx m\lambda$ . Основная доля света сосредоточена в центральной дифракционной полосе, т. е. между минимумами первого и минус первого порядков. Этим можно воспользоваться для оценки дифракционной расходимости световых пучков, выделяемых тем или иным способом, например в результате прохождения плоской волны через диафрагму. Световые лучи, прошедшие через диафрагму, отклоняются от своего исходного направления на угол

$$\delta\vartheta \sim \lambda/D, \quad (44.6)$$

где  $D$  — поперечное сечение пучка (в направлении, где оно минимально). Такое дифракционное уширение пучка обусловлено волновой природой света и принципиально не может быть устранено при заданной ширине пучка. Поэтому не существует строго параллельных пучков лучей. Это — идеализация, предполагающая, что поперечное сечение пучка бесконечно велико. Если пучок проходит путь  $l$ , то на этом пути он претерпевает дифракционное уширение  $\sim l \delta\vartheta = l\lambda/D$ . Таким уширением можно пренебрегать только тогда, когда оно мало по сравнению с шириной самого пучка, т. е. когда  $l\lambda/D \ll D$ , или  $l \ll D^2/\lambda$ . Только на таких расстояниях пучок может рассматриваться как луч геометрической оптики (см. § 41, пункт 3).

5. Допустим, что источником света является бесконечно удаленная светящаяся точка или линия, параллельная длине щели. Угол  $\vartheta$  на дифракционный минимум  $m$ -го порядка определяется условием (44.5). Ближайший к нему максимум сдвинут на угол  $\delta\vartheta$ , причем

$$b[\sin(\vartheta + \delta\vartheta) - \sin\vartheta_0] = m\lambda + \frac{\lambda}{2}.$$

Вычитая отсюда (44.5) и заменяя разности дифференциалами, получим  $b \cos\vartheta \cdot \delta\vartheta = \lambda/2$ . Пусть другой такой же (некогерентный) источник света сдвинут относительно первого как раз на угол  $\delta\vartheta$ . Тогда дифракционные максимумы от одного из этих источников наложатся на минимумы от другого. В результате дифракционные полосы пропадут. Угловое расстояние  $\delta\vartheta$  между точечными (или линейными) источниками, когда это произойдет, определяется формулой

$$\delta\vartheta = \lambda/2b \quad (44.7)$$

(при условии, что угол  $\vartheta$  мал).

Допустим теперь, что источник света протяженный и имеет форму равномерно светящейся полосы с угловой шириной  $\delta\Theta$ . Разобьем ее на две одинаковые части. Каждую часть в свою очередь разобьем на бесконечно узкие полоски одинаковой ширины. Скомбинируем их в пары полосок, сдвинутых относительно друг друга на угол  $\delta\Theta/2$ . Если  $\delta\Theta/2 = \delta\vartheta$ , то, очевидно, дифракционных полос не полу-

чится. Таким образом, условие исчезновения дифракционных полос от протяженного источника рассматриваемой формы будет

$$\delta\theta = \lambda/b. \quad (44.8)$$

От угловых размеров  $\delta\theta$  источника легко перейти к его линейным поперечным размерам  $\delta l$ . Если источник помещен в главном фокусе коллиматорной линзы с фокусным расстоянием  $f$ , то  $\delta l = f \delta\theta$ , т. е.

$$\delta l = f \frac{\lambda}{b}. \quad (44.9)$$

6. Когда ширина щели становится меньше или порядка длины волны, приближенный метод Френеля, которым мы пользовались выше, становится неприменимым. Тогда волновое поле в плоскости щели уже нельзя отождествлять с неискаженным полем падающей волны, как это делается в методе Френеля. Задачу надо решать математически строго с использованием уравнений Максвелла и соответствующих им граничных условий.

Впервые такой метод был осуществлен в 1896 г. Зоммерфельдом (1868—1951) в задаче о дифракции плоской волны на прямолинейном крае экрана. Зоммерфельд рассмотрел идеально проводящий (а потому непрозрачный) экран, толщина которого пренебрежимо мала по сравнению с длиной волны. Хотя в оптике такой случай и невозможно осуществить, решение Зоммерфельда имеет большое значение, так как оно позволяет судить о точности и границах применимости приближенных методов. В 1897 г. Рэлей решил задачу о дифракции на узкой щели ( $b \ll \lambda$ ) в бесконечно тонком идеально проводящем экране. В курсе общей физики нет возможности приводить эти решения<sup>1)</sup>. Сравним только их результаты с тем, что дает простой метод Френеля, чтобы составить более конкретное представление о границах применимости этого метода.

Предположим, что электрический вектор падающей волны параллелен щели. Как показывает строгий расчет, ход амплитуды дифрагированной волны качественно сохраняется, но выражается через функции Бесселя. Амплитудная кривая с ростом  $\vartheta$  спадает круче прежней функции  $(\sin \alpha)/\alpha$ . В максимуме значение амплитуды в  $4\lambda/(b\pi^2)$  раз меньше значения, определяемого формулой (44.1). Так, при  $b = \frac{1}{10}\lambda$  амплитуда уменьшается в четыре раза<sup>2)</sup>. Расхождение с приближенной теорией уменьшается при дальнейшем увеличении  $b$ .

Численные расчеты, выполненные Морзе и Рубинштейном (1938), показали, что при ширине щели около  $\lambda$  или больше результаты,

<sup>1)</sup> Интересующихся отсылаем к книге: А. Зоммерфельд. Оптика. ИЛ, Москва, 1953.

<sup>2)</sup> Если электрический вектор падающей волны перпендикулярен к длине щели, то амплитуда уменьшается слабее. Это легко понять, обратившись к соответствующему опыту Герца с проволочной решеткой (см., т. III, § 142, пункт 7).

полученные по приближенному методу Френеля, могут считаться достаточно удовлетворительными. Таким образом, даже в случае наиболее тонких современных дифракционных решеток (при щелях порядка 1000—2000 нм) приближенный метод Френеля не ведет еще к заметным ошибкам.

### § 45. Дифракция Фраунгофера на отверстиях

1. Допустим, что свет падает перпендикулярно к плоскости непрозрачного экрана с отверстиями. (Обобщение на случай наклонного падения не встречает никаких затруднений.) Координатную плоскость  $XU$  совместим с плоскостью экрана, через  $dF$  обозначим элемент площади в этой плоскости. Направление дифрагированного света будем характеризовать единичным вектором  $\mathbf{s}$  (рис. 178). Разность хода между лучами, вышедшими в этом направлении из элемента площади  $dF$  и из начала координат  $O$ , т. е. длина отрезка  $OA$ , равна  $(\mathbf{rs})$ , где  $\mathbf{r}(x, y)$  — радиус-вектор элемента  $dF$ . Соответствующая разность фаз будет  $k(\mathbf{rs})$ . Результирующее поле в френгоферовой дифракционной картине представится интегралом

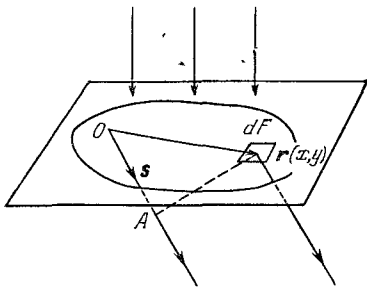


Рис. 178.

$$E = \int e^{ik(\mathbf{rs})} dF, \quad (45.1)$$

распространенным по всем отверстиям.

В случае прямоугольного отверстия удобно перейти к прямоугольным координатам, предполагая, что координатные оси параллельны сторонам отверстия. Если  $a$  и  $b$  — длины этих сторон, то

$$E = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ik(s_x x + s_y y)} dx dy. \quad (45.2)$$

Это — в точности такие же интегралы, которые встречались нам при рассмотрении дифракции на щели. Выполнив интегрирование, получим

$$E = ab \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right), \quad (45.3)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} k a s_x = \frac{\pi a s_x}{\lambda}, \quad \beta = \frac{1}{2} k b s_y = \frac{\pi b s_y}{\lambda}. \quad (45.4)$$

Заменяв в одном из интегралов пределы интегрирования бесконечными, получим предельный случай бесконечно длинной щели.