

полученные по приближенному методу Френеля, могут считаться достаточно удовлетворительными. Таким образом, даже в случае наиболее тонких современных дифракционных решеток (при щелях порядка 1000—2000 нм) приближенный метод Френеля не ведет еще к заметным ошибкам.

### § 45. Дифракция Фраунгофера на отверстиях

1. Допустим, что свет падает перпендикулярно к плоскости непрозрачного экрана с отверстиями. (Обобщение на случай наклонного падения не встречает никаких затруднений.) Координатную плоскость  $XU$  совместим с плоскостью экрана, через  $dF$  обозначим элемент площади в этой плоскости. Направление дифрагированного света будем характеризовать единичным вектором  $\mathbf{s}$  (рис. 178). Разность хода между лучами, вышедшими в этом направлении из элемента площади  $dF$  и из начала координат  $O$ , т. е. длина отрезка  $OA$ , равна  $(\mathbf{rs})$ , где  $\mathbf{r}(x, y)$  — радиус-вектор элемента  $dF$ . Соответствующая разность фаз будет  $k(\mathbf{rs})$ . Результирующее поле в френгоферовой дифракционной картине представится интегралом

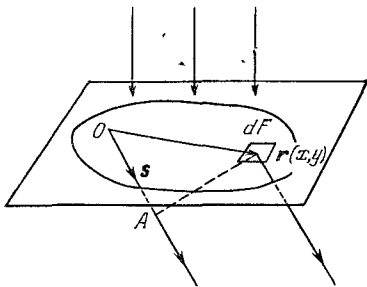


Рис. 178.

$$E = \int e^{ik(\mathbf{rs})} dF, \quad (45.1)$$

распространенным по всем отверстиям.

В случае прямоугольного отверстия удобно перейти к прямоугольным координатам, предполагая, что координатные оси параллельны сторонам отверстия. Если  $a$  и  $b$  — длины этих сторон, то

$$E = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ik(s_x x + s_y y)} dx dy. \quad (45.2)$$

Это — в точности такие же интегралы, которые встречались нам при рассмотрении дифракции на щели. Выполнив интегрирование, получим

$$E = ab \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right), \quad (45.3)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} k a s_x = \frac{\pi a s_x}{\lambda}, \quad \beta = \frac{1}{2} k b s_y = \frac{\pi b s_y}{\lambda}. \quad (45.4)$$

Заменяв в одном из интегралов пределы интегрирования бесконечными, получим предельный случай бесконечно длинной щели.

Интенсивность определяется формулой

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad (45.5)$$

Дифракционную картину можно получить, если наложить друг на друга две взаимно перпендикулярные дифракционные картины, одна из которых получена при дифракции на щели ширины  $a$ , а другая — на щели ширины  $b$  (рис. 179). Картина вытянута в направлении более короткой стороны прямоугольного отверстия.

Случай круглого отверстия на практике представляет большой интерес, так как все оправы линз и объективов имеют обычно круглую форму. В этом случае при вычислении интеграла (45.1) естественно перейти к

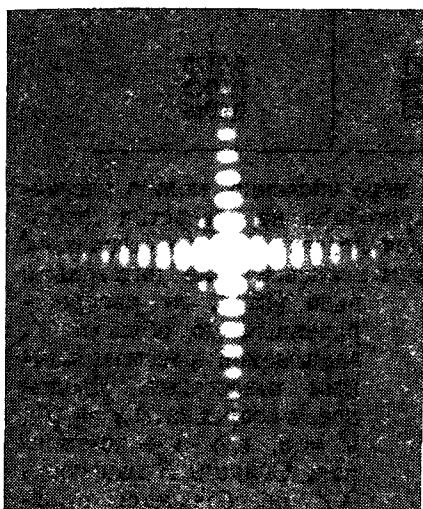


Рис. 179.

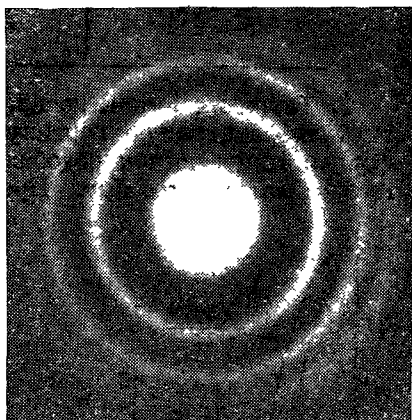


Рис. 180.

полярным координатам. При малых углах дифракции интеграл выражается через бесселеву функцию первого порядка  $J_1(\alpha)$ , где  $\alpha = kR\vartheta = 2\pi R\vartheta/\lambda$  ( $R$  — радиус отверстия,  $\vartheta$  — угол дифракции). Опуская вычисления, приведем окончательные результаты. Дифракционная картина, естественно, имеет вид концентрических светлых и темных колец (рис. 180). Центр картины светлый, так как в него все вторичные волны приходят в одинаковых фазах. Распределение амплитуд (пунктирная кривая) и интенсивностей (сплошная кривая) в зависимости от угла дифракции  $\vartheta$  (или, что то же, расстояния от центра картины) приведено на рис. 181. Соответствующие кривые мало отличаются от кривых рис. 175 не только качественно, но и коли-

чительно. Приближенно угловые радиусы темных колец определяются формулой

$$\vartheta_m = \left[ 0,61 + \frac{m-1}{2} \right] \frac{\lambda}{R}. \quad (45.6)$$

Более точные данные приведены в табл. 5. Из нее видно, что около 98% света приходится на центральный максимум. Если исключить центральный максимум, то остальные темные и светлые кольца практически равноотстоящие.

Таблица 5

| Минимумы             | Максимумы             | Интенсивность в максимумах |
|----------------------|-----------------------|----------------------------|
| $\vartheta_1 = 0,61$ | $\vartheta'_1 = 0$    | 1                          |
| $\vartheta_2 = 1,12$ | $\vartheta'_2 = 0,81$ | 0,0175                     |
| $\vartheta_3 = 1,62$ | $\vartheta'_3 = 1,33$ | 0,0042                     |
| $\vartheta_4 = 2,12$ | $\vartheta'_4 = 1,85$ | 0,0016                     |

2. Таким же путем, по крайней мере численно, можно рассчитать дифракционную картину Фраунгофера на отверстии любой формы. При решении подобных задач полезно руководствоваться *соображениями подобия*. Представим волновое поле интегралом

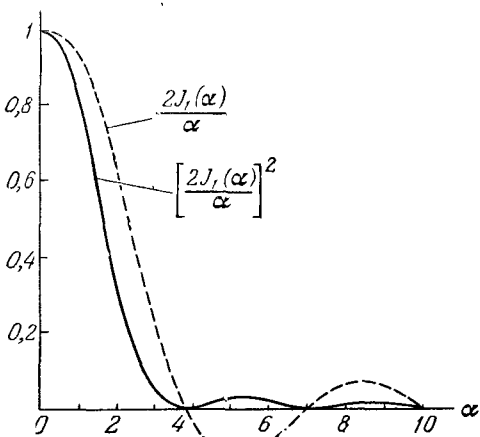


Рис. 181.

вида (45.2), но распространённым по области  $F$ , занимаемой рассматриваемым отверстием. Введем новые координаты  $x' = \mu x$ ,  $y' = y$ , где  $\mu$  — постоянная. Область  $F$  плоскости  $XU$  преобразуется в область  $F'$  плоскости  $X'U'$ . Она получается из  $F$  равномерным растяжением в  $\mu$  раз в направлении оси  $X$ . Интеграл (45.2) преобразуется в

$$E(s) = \frac{1}{\mu} \int_{F'} e^{i(s'_x x' + s'_y y')} dx' dy',$$

где единичный вектор  $s'$  определяется своими проекциями  $s'_x = s_x/\mu$ ,  $s'_y = s_y$ . (Постоянная  $\mu$  должна быть такой, чтобы  $s'^2_x + s'^2_y < 1$ .) Но последний интеграл представляет волновое поле  $E'(s')$  (в штрихованной системе координат) в направлении

единичного вектора  $\mathbf{s}'$  при фраунгоферовой дифракции на отверстии  $F'$ , а потому

$$E'(\mathbf{s}') = \mu E(\mathbf{s}). \quad (45.7)$$

Таким образом, по известной дифракционной картине на каком-либо отверстии можно без новых вычислений получить новые дифракционные картины. Для этого надо отверстие равномерно вытянуть (сжать) в каком-либо направлении. Тогда, как видно из формул  $x' = \mu x$ ,  $s'_x = s_x/\mu$ , дифракционная картина сожмется (вытянется) в том же направлении. Так, при растяжении круглого отверстия оно переходит в эллиптическое, а дифракционные кольца сжимаются, также принимая эллиптическую форму. Конечно, отверстие можно вытянуть или сжать и вдоль каких-либо двух направлений.

3. Рассмотрим теперь случай, когда в экране имеется большое число  $N$  одинаковых и одинаково ориентированных отверстий. Волновое поле в бесконечности представится суммой  $E = \sum E_i$ , где  $E_i$  — поле, которое возникло бы при дифракции при наличии одного только  $i$ -го отверстия. Для интенсивности получим

$$I = \overline{EE^*} = \sum I_i + \sum_{i \neq j} \sum \overline{E_i E_j^*}.$$

При фраунгоферовой дифракции распределение интенсивности в дифракционной картине определяется только направлением лучей, а не положением световых пучков. При боковом смещении последних интенсивность не меняется. *Распределение интенсивности не изменится, если отверстие в плоскости экрана сместить в сторону без изменения его ориентации.* Поэтому в последней сумме все интенсивности одинаковы:  $I_i = I_1$ .

Рассмотрим особо два случая: 1) отверстия расположены хаотически; 2) отверстия расположены «правильно», в определенном порядке. В первом случае среди членов двойной суммы с  $i \neq j$  в среднем найдется столько же положительных членов, сколько и отрицательных. При сложении таких членов в среднем получится нуль. Поэтому  $I = NI_1$ . Получается такая же дифракционная картина, что и от одного отверстия, но усиленная по интенсивности в  $N$  раз. Интенсивности отдельных картин арифметически складываются, но сами картины не интерферируют между собой. Во втором случае, напротив, члены с  $i \neq j$  не компенсируются. Они могут интерферировать и существенно влиять на дифракционную картину. Этот случай будет рассмотрен в следующем параграфе на примере дифракционной решетки.

Первый случай легко продемонстрировать на стеклянной пластинке, запыленной спорами ликоподия. Последние имеют форму шариков практически одинаковых размеров. При освещении пластинки параллельным пучком лучей на удаленном экране появляется дифрак-

ционная картина, состоящая из концентрических колец. При освещении белым светом внешние края колец окрашены в красный, а внутренние — в фиолетовый цвет. Это указывает на дифракционную природу явления, так как длины волн красных лучей больше, чем фиолетовых.

4. Описанное явление наблюдается в природе в виде *венцов*. Так называются светлые туманные кольца на небесном своде вокруг Солнца или Луны. Иногда венцы наблюдаются вокруг ярких звезд или планет, а также вокруг земных источников света. Венцы возникают в результате дифракции света на водяных капельках (или кристалликах льда), когда перед светилом проходит полупрозрачное облако (чаще всего высококучевое) или туман. Угловые радиусы венцов обычно не превосходят  $5^\circ$ . Дифракционная природа колец в явлении венцов подтверждается тем, что наружные края колец имеют красноватый цвет, а внутренние — синеватый. При наличии в атмосфере капель всевозможных размеров кольца венцов налагаются друг на друга и образуют общее белое сияние вокруг диска светила, называемое в случае Солнца *околосолнечным ореолом*.

От венцов следует отличать *гало*. Так называется группа оптических явлений в атмосфере, возникающая при преломлении или отражении лучей Солнца или Луны на плавающих в воздухе кристалликах льда, образующих перистые облака. Угловые радиусы гало значительно больше угловых радиусов венцов и составляют  $22^\circ$  или  $46^\circ$ . Наружный край колец гало имеет синеватую, а внутренний — красноватую окраску. Это указывает на рефракционную природу явления (дисперсия). В отличие от венцов, угловые размеры которых могут меняться с изменением радиусов водяных капелек, угловые размеры колец гало строго постоянны, так как они зависят только от углов между гранями кристалликов, которые при изменении размеров последних остаются неизменными.

## § 46. Дифракционная решетка

1. *Дифракционная решетка* — важнейший спектральный прибор, предназначенный для разложения света в спектр и измерения длин волн. Она представляет собой плоскую стеклянную или металлическую поверхность, на которой делительной машиной нарезано очень много (до сотен тысяч) прямых равноотстоящих штрихов. На стеклянных решетках наблюдения можно производить как в *проходящем*, так и в *отраженном свете*, на металлических — только в *отраженном*. Применяются *вогнутые металлические решетки*, в которых штрихи наносятся на вогнутой сферической поверхности.

Сначала рассмотрим простейшую идеализированную решетку, состоящую из одинаковых равноотстоящих параллельных щелей, сделанных в непрозрачном экране. Ширину щели обозначим через  $b$ , ширину непрозрачной части экрана между двумя соседними ще-