

Исключив $d\psi$, получим

$$\frac{\delta\Phi}{\Phi} = \frac{1}{\cos^2 \psi} \frac{\delta n}{n} - \frac{\delta\lambda}{\lambda}.$$

Подставим сюда значения $\delta\Phi$, $\Phi = 2m\pi$, а также $\delta n = (dn/d\lambda) \delta\lambda$. Тогда

$$\left| \frac{\lambda}{\delta\lambda} \right| = \frac{2\pi \sqrt{R} m}{1-R} \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \psi} \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (48.12)$$

Эта формула выведена в предположении бесконечного числа интерферирующих пучков. Она была бы применима к интерферометру Фабри — Перо, если бы в нем пространство между отражающими зеркалами было заполнено однородной средой, показатель преломления n которой отличен от единицы (для такого интерферометра можно было бы положить $\cos \psi = 1$). Для пластинки Луммера — Герке формула неприменима из-за ограниченного числа интерферирующих пучков. В этом случае, как ясно из изложенного выше, формулу надо заменить на

$$\left| \frac{\lambda}{\delta\lambda} \right| = Nm \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \psi} \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (48.13)$$

После подстановки значений N , m и $\cos \psi$ получаем

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = L \left(\frac{n^2 - 1}{\lambda} - n \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (48.14)$$

Аналогично, для дисперсионной области

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2h \sqrt{n^2 - 1} \left(1 - \frac{\lambda n}{n^2 - 1} \frac{dn}{d\lambda} \right)}. \quad (48.15)$$

Из-за дисперсии показателя преломления стекла разрешающая способность пластинки Луммера — Герке возрастает, а дисперсионная область уменьшается.

§ 49. Разрешающая способность призмы

1. Действие призмы как спектрального прибора основано на зависимости показателя преломления вещества от длины волны. Для определения разрешающей способности призмы необходимо учесть дифракцию света на краях диафрагмы или самой призмы, ограничивающих ширину падающего светового пучка. Допустим сначала, что на призму падает монохроматический параллельный пучок лучей, ограниченный диафрагмой AA' (рис. 196). Пусть волновой фронт падающей волны совпадает с плоскостью диафрагмы AA' . Возьмем за призмой произвольный волновой фронт BB' . По определению волнового фронта оптические длины ($ACDB$) и

$(A'C'D'B')$ одинаковы:

$$AC + na + DB = A'C' + nb + D'B', \quad (49.1)$$

где a и b — геометрические длины CD и $C'D'$, проходимые светом в веществе призмы.

Если крайние точки B и B' сместить бесконечно мало вдоль плоскости BB' и соединить их с A и A' бесконечно близкими виртуальными лучами, то в силу принципа Ферма равенство (49.1) сохранится с точностью до членов высших порядков относительно этих боковых смещений. Это приводит к следующему правилу построения волнового фронта. Надо от точек исходного волнового фронта

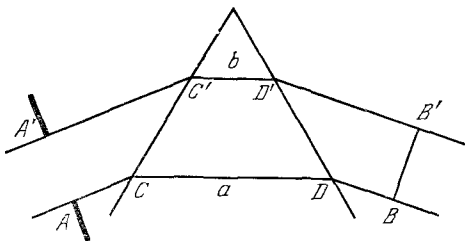


Рис. 196.

провести действительные или бесконечно близкие к ним виртуальные лучи и отложить на них отрезки одинаковой оптической длины. Геометрическое место концов таких отрезков и даст новое положение волнового фронта. В случае плоских волновых фронтов достаточно ограничиться построением край-

них лучей $ACDB$ и $A'C'D'B'$. При построении волновых фронтов, отличающихся бесконечно мало своими направлениями, можно пользоваться одними и теми же световыми путями, хотя истинные пути света и отличаются друг от друга. То же справедливо для световых пучков, бесконечно мало отличающихся длинами волн. Это используется ниже для упрощения вычислений.

Учтем теперь дифракцию света на краях диафрагмы AA' и определим за призмой направления на нулевой дифракционный максимум и дифракционные минимумы. Проведем крайние лучи $ACDB$ и $A'C'D'B'$, которые могут быть либо действительными, либо бесконечно близкими к ним виртуальными, и пересечем их произвольной плоскостью BB' . (Мы не предполагаем теперь, что плоскость BB' перпендикулярна к световым лучам.) Если разность оптических длин $(ACDB)$ и $(A'C'D'B')$ равна нулю, то плоскость BB' будет одним из волновых фронтов. Нормаль к ней укажет направление на главный максимум, т. е. максимум нулевого порядка. Если же эти оптические длины отличаются на целое число длин волн, то, как и при дифракции на щели, нормаль к плоскости BB' укажет направление на дифракционный минимум соответствующего порядка. В частности, если оптические длины отличаются на λ , то получится дифракционный минимум первого порядка.

2. Теперь нетрудно вывести формулу для разрешающей способности призмы. Предположим, что на диафрагму падает параллель-

ный пучок света с двумя длинами волн λ и λ' . Пусть плоскость BB' есть волновой фронт для длины волны λ' . Нормаль к ней определяет направление на нулевой максимум для длины волны λ' . Пусть то же направление есть направление на дифракционный минимум первого порядка для длины волны λ . Согласно критерию Рэлея разность $\delta\lambda = \lambda' - \lambda$ есть минимальное расстояние, разрешаемое призмой. На основании сказанного выше

$$\begin{aligned} AC + n(\lambda') a + DB &= A'C' + n(\lambda') b + D'B', \\ AC + n(\lambda) a + DB &= A'C' + n(\lambda) b + D'B' + \lambda. \end{aligned}$$

Вычитая почленно, получим

$$(a - b) [n(\lambda') - n(\lambda)] = -\lambda,$$

или

$$(a - b) \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda = -\lambda.$$

Отсюда для разрешающей способности призмы получаем

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = - (a - b) \frac{dn}{d\lambda}. \quad (49.2)$$

Из вывода ясно, что под λ следует понимать длину волны в вакууме. Предполагается, что дисперсия стекла нормальная, т. е. $dn/d\lambda < 0$.

Разрешающая способность призмы зависит только от дисперсии показателя преломления $dn/d\lambda$ и разности путей a и b , проходимых в призме крайними лучами пучка. Поэтому для полного использования разрешающей способности необходимо, чтобы световой пучок покрывал всю боковую поверхность призмы, на которую он падает. В этом случае $b = 0$, а a означает длину основания призмы. Например, для стеклянной призмы из тяжелого флинта в желтой области спектра $dn/d\lambda \approx -956 \text{ см}^{-1}$. Разрешающая способность призмы при $a = 1 \text{ см}$ в указанной области спектра будет $\lambda/\delta\lambda \approx \approx 956$. Это минимальная разрешающая способность, при которой может быть разрешена двойная D -линия натрия ($\lambda = 589,0 \text{ нм}$, $\lambda' = 589,6 \text{ нм}$).

Для сложной призмы, состоящей из нескольких простых призм, поставленных одна за другой, формула (49.2) должна быть заменена на

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = - \sum_i (a_i - b_i) \frac{dn_i}{d\lambda}. \quad (49.3)$$

Здесь суммирование производится по всем призмам, составляющим систему.

3. Призму можно рассматривать как предельный случай эшелона Майкельсона (рис. 194 и 195). Допустим, что ширина и высота ступеньки эшелона стремятся к нулю, а общее число ступенек —

к бесконечности. При этом последовательно будут исчезать спектры высших порядков, пока не останется только спектр нулевого порядка. Начиная с этого момента, эшелон будет действовать как призма. При $m = 0$ формула (48.6) перейдет в формулу (49.2), так как Nh есть длина основания призмы. Для дисперсионной области в этом случае формула (48.8) дает $\Delta\lambda = \infty$. Этого и следовало ожидать, так как весь свет, выходящий из призмы, концентрируется в спектре нулевого порядка, а потому вопрос о наложении спектров разных порядков не возникает.

ЗАДАЧИ

1. Какую разрешающую силу должен иметь спектральный аппарат для разрешения дублета D -линии натрия ($\lambda_1 = 589,0$ нм, $\lambda_2 = 589,6$ нм)? Подсчитать минимальное число штрихов решетки, которая может разрешить его в спектре первого порядка. При каком наименьшем основании a можно сделать то же самое с помощью призмы, изготовленной из стекла с дисперсией $dn/d\lambda = -956$ см⁻¹?

О т в е т. 1) $\lambda/\delta\lambda > 1000$; 2) $N \sim 1000$; 3) $a \approx 1$ см.

2. Изменяется ли разрешающая сила решетки при изменении наклона первичного пучка, падающего на нее?

О т в е т. Нет.

3. Изменится ли разрешающая способность и дисперсионная область дифракционной решетки, если, закрепив неподвижно трубу, в которую наблюдаются дифракционные спектры, закрыть через одну щели решетки?

О т в е т. Разрешающая способность не изменится. Дисперсионная область уменьшится вдвое.

4. На плоскую отражательную решетку, содержащую $N = 50\,000$ штрихов, нормально падает свет от двойной линии натрия ($\lambda_1 = 589,0$ нм, $\lambda_2 = 589,6$ нм). Число штрихов, приходящееся на 1 см длины решетки, равно $n = 5000$. Какой максимальный порядок спектра m можно получить от такой решетки и каково минимальное расстояние $\delta\lambda$ между спектральными линиями, которое способна разрешить решетка в указанной области спектра? Спектр максимального порядка фотографируется на фотопластинке с помощью объектива с фокусным расстоянием $f = 50$ см. Какое расстояние Δx между спектральными линиями λ_1 и λ_2 получится на фотопластинке?

О т в е т. $m = 3$; $\delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm} = 0,004$ нм; $\Delta x = \frac{fm \delta\lambda}{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}} = 1$ мм.

5. Как изменится разрешающая способность и дисперсионная область пластинки Луммера — Герке, если 1) ее толщину увеличить вдвое, а длину оставить без изменения; 2) длину увеличить вдвое, а толщину оставить без изменения?

О т в е т. 1) Разрешающая способность не изменится, дисперсионная область уменьшится вдвое. 2) Разрешающая способность увеличится вдвое, дисперсионная область не изменится.

6. Какую минимальную длину должна иметь пластинка Луммера — Герке ($n = 1,5$), чтобы разрешить дублетную структуру водородной линии H_α ($\lambda = 656,3$ нм)? Разность длин волн линий дублета равна 0,014 нм. Пренебречь величиной $dn/d\lambda$.

О т в е т. $L = \frac{\lambda^2}{(n^2 - 1)\delta\lambda} = 2,5$ см.

7. Какая интерференционная картина будет наблюдаться при освещении монохроматическим светом двух скрещенных пластинок Луммера — Герке, т. е. двух пластинок, расположенных одна за другой вдоль прямой линии, но повернутых друг относительно друга на 90°?

О т в е т. Будет наблюдаться система пятен, расположенных в узлах прямоугольной сетки.

8. Какой должна быть длина a основания стеклянной призмы, чтобы она имела такую же разрешающую способность, как и пластинка Луммера — Герке длиной $L = 20$ см? Показатель преломления пластинки $n = 1,5$; дисперсия показателя преломления призмы $dn_{\text{пр}}/d\lambda = -956 \text{ см}^{-1}$; $\lambda = 600 \text{ нм}$.

$$\text{О т в е т. } a = -\frac{L(n-1)}{\lambda dn_{\text{пр}}/d\lambda} = 44 \text{ м.}$$

9. Эшелон Майкельсона состоит из $N = 30$ стеклянных пластинок с показателем преломления $n = 1,5$; толщина каждой из них $h = 1$ см. Какова должна быть длина a основания стеклянной призмы, чтобы она имела такую же разрешающую способность, что и рассматриваемый эшелон? Дисперсия показателя преломления призмы $dn_{\text{пр}}/d\lambda = 956 \text{ см}^{-1}$; $\lambda = 600 \text{ нм}$.

$$\text{О т в е т. } a = \frac{Nh(n-1)}{\lambda dn_{\text{пр}}/d\lambda} = 2,6 \text{ м.}$$

10. Стеклянная призма с основанием $a = 10$ см изготовлена из тяжелого флинта, дисперсия которого в окрестности $\lambda = 600 \text{ нм}$ равна $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$. Какую максимальную разрешающую способность может иметь дифракционная решетка, ширина заштрихованной части которой равна длине основания этой призмы? Сравнить разрешающую способность такой решетки с разрешающей способностью призмы.

Р е ш е н и е. Из формулы решетки $d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) = m\lambda$ следует $m\lambda \leq \leq 2d$. Отсюда умножением на $N = a/d$ получаем для максимальной разрешающей способности решетки

$$R_{\text{реш}} = Nm = 2a/\lambda = 3 \cdot 10^5 \quad \text{и} \quad \frac{R_{\text{реш}}}{R_{\text{пр}}} = \frac{2/\lambda}{dn/d\lambda} = 33.$$

Из этого примера видно, что при одних и тех же геометрических размерах разрешающая способность решетки, вообще говоря, много больше, чем призмы.

11. Оценить ширину коллиматорной щели, при которой практически полностью используется теоретическая разрешающая способность призмы.

Р е ш е н и е. Предельная разрешающая способность призмы найдется из формулы (49.2), если положить $b = 0$. Пусть на призму падает плоская волна, содержащая длины волн λ и λ' , расстояние между которыми $\delta\lambda$ равно минимальному расстоянию, разрешаемому призмой. Разность показателей преломления для этих длин волн $\delta n = (dn/d\lambda) \delta\lambda$. Подставляя сюда $\delta\lambda = \lambda / \left(a \frac{dn}{d\lambda} \right)$, получим

$\delta n = \lambda/a$. По выходе из призмы первоначально параллельный пучок света из-за дисперсии делается расходящимся. Рассчитаем угловое расхождение вышедшего пучка. Как видно из рисунка 197, $\sin \varphi_1 = n \sin \psi_1$. Дифференцируя при постоянном φ_1 , откуда находим:

$\delta n \sin \psi_1 + n \cos \psi_1 \cdot \delta \psi_1 = 0$. Так как $\psi_1 + \psi_2 = A = \text{const}$ и, следовательно, $\delta \psi_1 + \delta \psi_2 = 0$, то $\delta n \sin \psi_1 = n \cos \psi_1 \cdot \delta \psi_2$. Из закона преломления $\sin \varphi_2 = n \sin \psi_2$ находим искомое угловое расхождение вышедшего пучка:

$$\begin{aligned} \delta \varphi_2 &= \frac{\sin \psi_2}{\cos \varphi_2} \delta n + \frac{n \cos \psi_2}{\cos \varphi_2} \delta \psi_2 = \\ &= \left(\frac{\sin \psi_2}{\cos \varphi_2} + \frac{n \cos \psi_2}{\cos \varphi_2} \frac{\sin \psi_1}{n \cos \psi_1} \right) \delta n. \end{aligned}$$

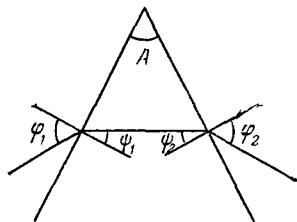


Рис. 197.

При работе призма должна быть установлена на угол наименьшего отклонения, а потому $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$,

$$\delta \varphi_2 = 2 \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \delta n = 2 \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \frac{\lambda}{a}.$$

Если h — ширина щели, f — фокусное расстояние коллиматора, то угловая ширина щели будет $\alpha = h/f$. Для полного использования разрешающей способности призмы угол α должен быть мал по сравнению с углом $\delta\varphi_2$. Практически достаточно, чтобы угол α был меньше приблизительно половины угла $\delta\varphi_2$. Это дает

$$h < \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \frac{f\lambda}{a}. \quad (49.4)$$

Так как $\psi = A/2$, то

$$h < \frac{\sin (A/2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 (A/2)}} \cdot \frac{f\lambda}{a}. \quad (49.5)$$

При $a = 10$ см, $A = 60^\circ$, $n = 1,73$, $f = 25$ см, $\lambda = 500$ нм последняя формула дает $h < 1,2 \cdot 10^{-3}$ мм.

§ 50. Действие спектрального аппарата на световые импульсы

1. В предыдущих параграфах спектральный аппарат рассматривался как *анализатор*, пространственно разделяющий монохроматические волны, уже имеющиеся (согласно теореме Фурье) в световом возмущении, попадающем в этот прибор. Но на него можно также смотреть как на *генератор*, который под действием непериодических возмущений (импульсов) вырабатывает периодические возмущения и пространственно разделяет их. Проще всего такой подход разъяснить на примере дифракционной решетки.

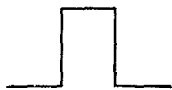


Рис. 198.



Рис. 199.

Предположим, что решетка состоит из бесконечного числа равноотстоящих щелей в непрозрачном экране. Пусть на нее нормально падает какое-либо плоское непериодическое возмущение. Его форма для последующих рассуждений не имеет значения. Для наглядности будем изображать его в виде бесконечно короткого прямоугольного импульса (рис. 198). Достигнув в момент t_0 всех точек решетки, импульс возбудит вторичные цилиндрические волны, исходящие от щелей решетки. Вместо одиночного импульса за решеткой получится бесконечное множество следующих друг за другом пространственно разделенных импульсов с цилиндрическими волновыми фронтами (рис. 199). Сечения волновых фронтов плоскостью чертежа в любой фиксированный момент времени t будут окружностями одного и того же радиуса $c(t - t_0)$, описанными из щелей решетки как из центров (рис. 200). На больших расстояниях от решетки малые участки волновых фронтов могут