

Если h — ширина щели, f — фокусное расстояние коллиматора, то угловая ширина щели будет $\alpha = h/f$. Для полного использования разрешающей способности призмы угол α должен быть мал по сравнению с углом $\delta\varphi_2$. Практически достаточно, чтобы угол α был меньше приблизительно половины угла $\delta\varphi_2$. Это дает

$$h < \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \frac{f\lambda}{a}. \quad (49.4)$$

Так как $\psi = A/2$, то

$$h < \frac{\sin (A/2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 (A/2)}} \cdot \frac{f\lambda}{a}. \quad (49.5)$$

При $a = 10$ см, $A = 60^\circ$, $n = 1,73$, $f = 25$ см, $\lambda = 500$ нм последняя формула дает $h < 1,2 \cdot 10^{-3}$ мм.

§ 50. Действие спектрального аппарата на световые импульсы

1. В предыдущих параграфах спектральный аппарат рассматривался как *анализатор*, пространственно разделяющий монохроматические волны, уже имеющиеся (согласно теореме Фурье) в световом возмущении, попадающем в этот прибор. Но на него можно также смотреть как на *генератор*, который под действием непериодических возмущений (импульсов) вырабатывает периодические возмущения и пространственно разделяет их. Проще всего такой подход разъяснить на примере дифракционной решетки.

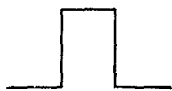


Рис. 198.



Рис. 199.

Предположим, что решетка состоит из бесконечного числа равноотстоящих щелей в непрозрачном экране. Пусть на нее нормально падает какое-либо плоское непериодическое возмущение. Его форма для последующих рассуждений не имеет значения. Для наглядности будем изображать его в виде бесконечно короткого прямоугольного импульса (рис. 198). Достигнув в момент t_0 всех точек решетки, импульс возбудит вторичные цилиндрические волны, исходящие от щелей решетки. Вместо одиночного импульса за решеткой получится бесконечное множество следующих друг за другом пространственно разделенных импульсов с цилиндрическими волновыми фронтами (рис. 199). Сечения волновых фронтов плоскостью чертежа в любой фиксированный момент времени t будут окружностями одного и того же радиуса $c(t - t_0)$, описанными из щелей решетки как из центров (рис. 200). На больших расстояниях от решетки малые участки волновых фронтов могут

рассматриваться как плоские и следующие друг за другом через равные промежутки времени

$$\tau = \frac{d \sin \vartheta}{c}. \quad (50.1)$$

На таких расстояниях возмущение представляется периодической функцией $E(t)$, период которой τ зависит от угла ϑ , т. е. от направления излучения. Вместо непериодического импульса решетка создает пространственно разделенные периодические возмущения различных периодов. Исключение составляют импульсы, которые за решеткой распространяются под углом $\vartheta = 0$. В этом случае разложения не будет. Эти периодические возмущения, вообще говоря, не синусоидальны.

Но, как и всякие периодические функции, они могут быть разложены в ряд Фурье с основным периодом τ . Для понимания действия решетки такое разложение не обязательно. Но оно целесообразно, когда приемниками излучения в спектроскопах и спектрографах являются глаз, фотографическая пластинка и другие селективные приемники. Они действуют подобно набору гармонических осцилляторов с различными собственными частотами.

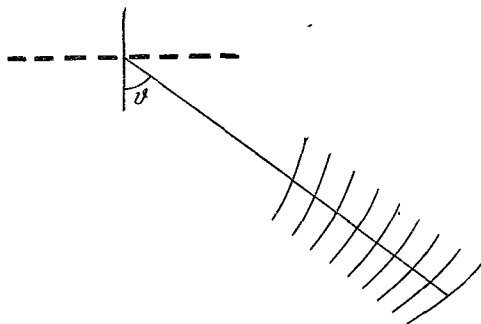


Рис. 200.

Ряд Фурье, в который может быть разложено периодическое возмущение $E(t)$, вообще говоря, будет содержать монохроматическую волну с основным периодом τ . Наряду с ней могут войти гармоники с периодами $\tau/2$, $\tau/3$, Не все эти гармоники воспринимаются приемником. В простейшем случае только одна из них, например гармоника с периодом τ/m , действует на приемник.

Обозначим ее период через T . Тогда $T = \frac{\tau}{m} = \frac{d \sin \vartheta}{cm}$, или

$$d \sin \vartheta = m\lambda. \quad (50.2)$$

Это — основная формула дифракционной решетки. Но могут быть и такие случаи, когда разложение Фурье содержит две или больше гармоник, действующих на приемник. Тогда имеет место перекрытие спектров разных порядков. Это, однако, возможно только тогда, когда падающее излучение заполняет спектральный интервал, ширина которого превосходит дисперсионную область решетки.

Рассмотрим теперь воздействие на решетку единичной монохроматической волны с периодом T . Вторичные волны, выходящие в этом случае из щелей решетки, а потому и их суперпозиция будут монохроматическими с тем же периодом T . Значит, монохроматическая волна после прохождения через спектральный аппарат остается монохроматической без изменения периода. Отсюда и из принципа суперпозиции следует, что *в спектре решетки не могут появиться монохроматические составляющие с частотами, отсутствующими в спектре падающего излучения*. Если спектральная область, занимаемая падающим излучением, не превосходит дисперсионную область, перекрытия спектров различных порядков совсем не будет. При этом в случае неограниченной решетки в спектре каждого порядка каждому направлению луча будет соответствовать строго определенная длина волны λ . Наложения волн различных частот не будет. Это значит, что разрешающая способность неограниченной решетки бесконечно велика.

2. Допустим теперь, что длина решетки L и число штрихов N конечны. Тогда периодические возмущения, формирующиеся решеткой, будут состоять из N импульсов, следующих один за другим через время $\tau = (d \sin \vartheta)/c$. Время

$$\Theta = N\tau = \frac{Nd \sin \vartheta}{c} = \frac{L \sin \vartheta}{c} \quad (50.3)$$

приблизительно равно времени от момента появления первого до момента появления N -го импульсов. Оно называется *временем затягивания импульса*, так как за решеткой вместо одиночного короткого импульса получается волновой процесс длительностью Θ . Время Θ называют также *временем установления спектрального аппарата*, так как по прошествии такого времени начинают действовать все N штрихов решетки. Волновое возмущение в точке наблюдения может быть представлено в виде

$$E(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_N(t),$$

где слагаемые в правой части представляют импульсы, приходящие от отдельных штрихов. Так как эти импульсы запаздывают один относительно другого на время τ , а в остальном совершенно тождественны, то $f_2(t) = f_1(t - \tau)$, $f_3(t) = f_1(t - 2\tau)$ и т. д. Результирующее возмущение представится в виде

$$E(t) = f_1(t) + f_1(t - \tau) + \dots + f_1[t - (N - 1)\tau].$$

Разложим его в интеграл Фурье:

$$E(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{где} \quad A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Подставив сюда выражение для $E(t)$ и учтя, что $f_1(t - \tau) = f_1(t)$, получим

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} [1 + e^{-i\omega\tau} + \dots + e^{-i\omega(N-1)\tau}] \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt = \\ = F(\omega) \frac{\sin(N\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}, \quad (50.4)$$

где введено обозначение

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} e^{-i(N-1)\omega\tau/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Величина $|F(\omega)|^2 d\omega$ с точностью до постоянного множителя представляет интенсивность падающего импульса, приходящуюся на интервал частот $(\omega, \omega + d\omega)$. Такой же смысл имеет величина $|A(\omega)|^2 d\omega$ для излучения, выходящего из решетки под углом ϑ . Теперь дифрагированное излучение, распространяющееся от решетки в определенном направлении, состоит не из одной монохроматической волны, как было в случае неограниченной решетки, а непрерывно распределено по спектру частот. Главные максимумы в этом распределении приходятся на частоты, при которых знаменатель в выражении (50.4) обращается в нуль, т. е. $\omega\tau/2 = m\pi$. Это приводит к соотношению (50.2). Главные максимумы не появятся, если $F(\omega) = 0$, т. е. когда в падающем импульсе не представлено излучение соответствующей частоты. Ближайший минимум в распределении интенсивности по частотам приходится на частоту, определяемую условием $N\omega\tau/2 = Nmt + \pi$, так как при такой частоте числитель в формуле (50.4) обращается в нуль. Величина

$$\delta\omega = \frac{2\pi}{N\tau} = \frac{2\pi}{\Theta} \quad (50.5)$$

определяет порядок ширины спектральной области, которую заполняют волны, выходящие из решетки в одном и том же направлении. По своему содержанию соотношение (50.5), очевидно, совпадает с ранее выведенной и подробно проанализированной формулой (29.8).

Допустим теперь, что возмущение, падающее на решетку, состоит из одной только неограниченной синусоиды. Тогда частота ω в формуле (50.4) будет фиксирована. Но угол ϑ может меняться, а формула (50.4) определит зависимость амплитуды дифрагированного света от этого угла. Так как $\omega\tau = (2\pi/\lambda) d \sin \vartheta$, то эта зависимость представится формулой

$$A(\vartheta) = F(\vartheta) \frac{\sin N \frac{\pi d \sin \vartheta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \vartheta}{\lambda}}, \quad (50.6)$$

тождественной с формулой (46.1). Поэтому отпадает надобность в дальнейших рассуждениях. Заметим только, что разрешающая способность R связана с временем установления Θ соотношением

$$R = \Theta/T. \quad (50.7)$$

3. По описанной схеме действует всякий спектральный прибор. Это совершенно очевидно для интерференционных спектральных приборов, но не столь очевидно для призмы. В случае призмы время распространения света от волнового фронта AB (рис. 201) до другого волнового фронта $A'B'$ одно и то же для всех лучей. Однако это заключение относится к фазе волны и из него не следует, что световой импульс придет в точку наблюдения целиком (что было бы, если бы вещество призмы не обладало дисперсией), а не разобьется на ряд

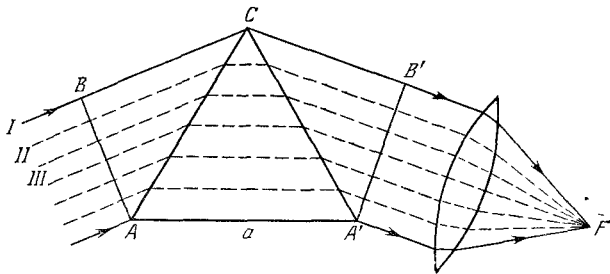


Рис. 201.

следующих друг за другом тождественных импульсов. В диспергирующей среде импульсы, вышедшие одновременно от различных точек волнового фронта AB , придут в соответствующие точки волнового фронта $A'B'$ не одновременно. Импульс растянется во времени, и можно говорить о времени затягивания Θ .

Наиболее просто работу призмы можно проанализировать, когда падающий на нее импульс представляет группу волн, т. е. заполняет узкую область частот. Этого предположения достаточно для анализа наиболее важного вопроса — о разрешающей способности призмы. Как известно (см. § 8), при распространении в диспергирующей среде группа непрерывно деформируется, периодически восстанавливая свою форму через время восстановления $\tau = d\lambda/dv$. Разобьем падающий пучок на ряд пучков I, II, III, \dots равноотстоящими плоскостями, параллельными лучам самого пучка. Разбиение произведем так, чтобы каждый пучок приходил в фокус F с запаздыванием τ по отношению к предыдущему пучку. Тогда волновые импульсы, связанные с рассматриваемыми пучками, по выходе из призмы будут иметь одну и ту же форму. Через фокус F последовательно будут проходить тождественные световые импульсы, следующие друг за другом через одно и то же время τ . Призма

преобразовала падающий на нее импульс в последовательность равноотстоящих импульсов, т. е. в периодическое возмущение, а это и требуется от спектрального аппарата. Время затягивания, очевидно, равно $\Theta = AA'/u - BCB'/c$. По определению волнового фронта $BCB'/c = AA'/v = a/v$. Здесь v означает фазовую, а u — групповую скорости света в веществе призмы. Таким образом,

$$\Theta = a \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right) = a \frac{v-u}{uv},$$

или на основании формулы (8.8)

$$\Theta = -a \frac{\frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}}{v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)} = -\frac{a}{v} \frac{\lambda}{d} \frac{dn}{n\lambda}. \quad (50.8)$$

Поделив это выражение на T , найдем разрешающую способность призмы:

$$R = -a \frac{dn}{d(n\lambda)}. \quad (50.9)$$

Здесь λ означает длину волны в призме, тогда как в формуле (49.2) той же буквой обозначена длина волны в вакууме. Обозначив последнюю через λ_0 , получим

$$R = -a \frac{dn}{d\lambda_0}, \quad (50.10)$$

что по содержанию совпадает с формулой (49.2). С изложенной точки зрения особенно ясно действие системы призм, разрешающая способность которой выражается формулой (49.3).

§ 51. Вогнутая отражательная решетка

1. Свет, дифрагировавший на обычной плоской решетке с равноотстоящими штрихами, должен направляться на линзу или другое фокусирующее устройство, чтобы в фокальной плоскости получилась картина резких спектральных линий. Однако можно обойтись и без линзы, если штрихи на плоской поверхности нанести неравномерно, надлежащим образом монотонно уменьшая или увеличивая расстояние между ними. Можно также придать поверхности решетки вогнутую сферическую форму и нанести на нее равноотстоящие штрихи.

Фокусирующее действие многих решеток было замечено давно, но до работ Роулэнда оно рассматривалось как недостаток решетки. Роулэнд превратил его в достоинство решетки, построив *вогнутые отражательные решетки*. Наряду с интерферометром Фабри — Перо такие решетки до настоящего времени являются основными спектральными аппаратами, широко используемыми в точных спектроскопических исследованиях. Спектральные линии, получаемые с помощью вогнутых отражательных решеток, по своей резкости значительно превосходят те же линии в решетках, где фокусировка осуществляется с помощью линз.

2. Пусть G_0G (рис. 202) — отражающая сферическая поверхность радиуса ρ с центром в точке S , на которой нанесены штрихи равноотстоящими плоскостями,