

тельной установки щели на параллельность штрихам решетки. По той же причине нельзя делать штрихи решетки очень длинными. Обычно наносят короткие штрихи вдоль широких участков, а не стремятся покрыть ими большую площадь, как в случае плоской решетки, не обладающей астигматизмом.

5. Роулэнду принадлежит и теоретически наиболее совершенный способ установки дифракционной решетки, показанный на схематическом рис. 203. Решетка G_0G и фотографическая камера устанавливаются на противоположных

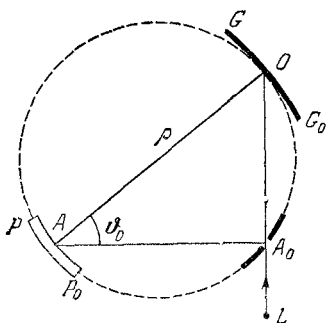


Рис. 203.

концах твердого стержня OA , длина которого равна радиусу кривизны решетки ρ . Они могут скользить вдоль взаимно перпендикулярных рельсов A_0O и A_0A на салазках, шарнирно соединенных со стержнем OA . Для достижения лучшей отчетливости изображения фотопластинку P_0P изгибают по окружности, совпадающей с кругом Роулэнда. Щель помещается в точке пересечения A_0 направляющих рельсов. При фотографировании спектров разных порядков, а также различных участков одного и того же спектра щель A_0 и источник света L остаются неподвижными. Так как точки O , A_0 , A лежат на круге Роулэнда, то при надлежащем положении стержня OA изображение щели A_0 получится в точке A . При перемещении концов стержня вдоль направляющих рельсов через точку A будут последовательно проходить фокусы различных длин волн в спектре рассматриваемого порядка. Так как в установке Роулэнда $\phi = 0$, то $d \sin \phi_0 = m\lambda$. С другой стороны, $OA_0 = \rho \sin \phi_0$. Комбинируя эти две формулы, находим

$$OA = \frac{\rho m}{d} \lambda. \quad (51.14)$$

На стержне, связанном с рельсом OA_0 , можно нанести равномерную шкалу длин волн. Тогда длина волны, попадающей в центр поля зрения A , может быть отсчитана непосредственно по этой шкале.

При установке решетки по способу Роулэнда объем, занимаемый приборами, настолько велик, что в нем трудно поддерживать постоянство температуры, необходимое при длительных экспозициях. Кроме того, установка Роулэнда довольно дорога. По этим и по ряду других причин она применяется редко. Пашеном, Иглом и др. были разработаны другие способы; с ними можно ознакомиться по специальным руководствам по технике спектроскопии.

§ 52. Дифракция на решетке как краевая задача

1. В предыдущих параграфах волновое поле за решеткой вычислялось путем суммирования волн, исходящих от штрихов решетки. Для некоторых целей более предпочтителен другой способ. Допустим сначала, что решетка бесконечна. Переднюю поверхность ее будем называть *входом*, заднюю — *выходом*. Эта терминология применима и для отражательной решетки. Для нее входом и выходом служит одна и та же (передняя) поверхность. Без потери общности можно рассуждать так, как если бы решетка была бесконечно тонкой. Примем плоскость решетки за координатную плоскость XU . Ось X направим перпендикулярно к штрихам, а ось Z — в сторону распространения дифрагированного света (рис. 204). Как и раньше,

отвлечемся от векторного характера волнового поля, считая его скалярным. Это всегда можно сделать, если электрический или магнитный вектор падающей волны параллелен штрихам решетки. Надо только в первом случае световое поле характеризовать электрическим, а во втором — магнитным вектором. В общем случае падающую волну можно разложить на две составляющие, из которых одна поляризована в плоскости падения, а другая перпендикулярно к ней. Тогда задача о дифракции волны сведется к двум

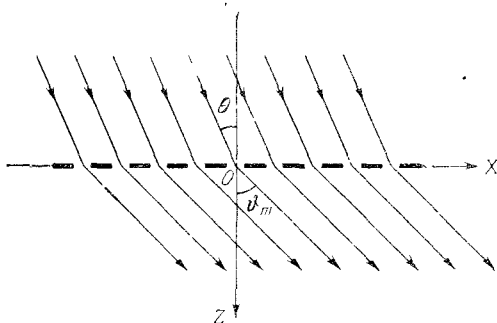


Рис. 204.

независимым задачам, отличающимся состоянием поляризации падающего света.

Падающую волну представим в виде

$$E_0 = Ae^{i(\omega t - kr)}. \quad (52.1)$$

Полагая здесь $z = 0$, найдем поле $E_{вх}$ на входе решетки. В силу линейности уравнений, определяющих распространение волн, суммарное поле прошедшей (отраженной) и дифрагированных волн на выходе можно представить в виде $E_{вых} = DE_{вх}$. Коэффициент D , вообще говоря, зависит от длины волны и называется *пропускаемостью* или *амплитудной прозрачностью решетки*. Это есть характеристика *только самой решетки*. Для двумерной решетки величина $D = D(x, y)$ есть функция двух координат, для одномерной — одной координаты: $D = D(x)$.

Задача о дифракции на всякой решетке сводится к нахождению амплитудной прозрачности последней. Действительно, знание этой величины позволяет определить поле на выходе решетки, а этого достаточно, чтобы по принципу Гюйгенса — Френеля вычислить поле дифрагированной волны. Для нахождения самого решения, конечно, не обязательно пользоваться принципом Гюйгенса — Френеля. Достаточно найти решение волнового уравнения

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad (52.2)$$

которое в плоскости $z = 0$ переходило бы в функцию $E_{\text{вых}}(x, y) = D(x, y) E_{\text{вх}}(x, y)$ и удовлетворяло некоторым дополнительным требованиям, определяющимся физическими условиями задачи. Такой метод в литературе известен под названием *метода Рэлея*, хотя он и является только частным случаем общего *метода краевых задач* математической физики. Здесь этот метод применяется к одномерной дифракционной решетке.

2. Поскольку для решетки D есть периодическая функция x с периодом d , ее можно представить рядом Фурье

$$D = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m e^{-im\pi x/d} \quad \left(p = \frac{2\pi}{d}\right). \quad (52.3)$$

Поэтому

$$E_{\text{вых}} = D E_{\text{вх}} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A D_m e^{i[\omega t - (k_x + mp)x]}. \quad (52.4)$$

На это соотношение надо смотреть как на *граничное условие*, которому должно удовлетворять за решеткой решение уравнения (52.2). Частным решением этого уравнения является плоская волна $E = a e^{i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}$, волновой вектор \mathbf{q} которой удовлетворяет условию $\mathbf{q}^2 = k^2$. Он может быть и вещественным (однородная волна), и комплексным (неоднородная волна). Суперпозицией таких решений можно получить общее решение:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{i(\omega t - q_m r)}. \quad (52.5)$$

Чтобы при этом удовлетворить граничному условию (52.4), необходимо положить

$$q_{mx} = k_x + mp, \quad q_{my} = 0. \quad (52.6)$$

Тогда $q_{mz} = \sqrt{k^2 - q_{mx}^2}$. Двухзначность квадратного корня устраняется физическими соображениями. Вещественным значениям q_{mz} соответствуют однородные волны, которые могут только *уходить от решетки*, а не *приходить к ней*. Этому условию удовлетворяют только положительные значения q_{mz} . Мнимым соответствуют неоднородные волны. При удалении от решетки они могут *только затухать*. Поэтому коэффициент при мнимой части должен быть отрицательным. Таким образом, соотношение (52.6) надо пополнить условиями

$$q_{mz} = \pm \sqrt{k^2 - q_{mx}^2} \quad \text{и} \quad q_{mz} = -i \sqrt{k^2 - q_{mx}^2}, \quad (52.6a)$$

в которых квадратные корни понимаются в *арифметическом смысле*. После этого волновые векторы \mathbf{q}_m определяются однозначно, а для

поля на выходе можно написать

$$E_{\text{вых}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m e^{i(\omega t - q_{mx}x)}.$$

Сравнение этого выражения с (52.4) дает

$$a_m = AD_m, \quad (52.7)$$

чем и завершается решение задачи.

3. Полагая в (52.6) $k_x = (2\pi/\lambda) \sin \theta$, $q_{mx} = (2\pi/\lambda) \sin \vartheta_m$, $p = 2\pi/d$, получим

$$d(\sin \vartheta_m - \sin \theta) = m\lambda, \quad (52.8)$$

т. е. основную формулу дифракционной решетки. Однако в полученном решении содержатся и новые результаты. Во-первых, весь спектр за решеткой состоит из *одних только главных максимумов*, никаких второстепенных максимумов нет. Это, конечно, объясняется тем, что полученные результаты относятся к неограниченной решетке. Во-вторых, в формулу (52.5), наряду с однородными, входят и *неоднородные волны*, а потому она определяет волновое поле на *любых расстояниях от решетки*, а не только в волновой зоне, как было в случае формулы (46.2). При нормальном падении света наивысший порядок однородных волн m определяется условием $m \leq d/\lambda$. При $m > d/\lambda$ составляющая q_{mx} мнимая. Соответствующая неоднородная волна экспоненциально затухает по закону $\exp(-\kappa_m z)$, где

$$\kappa_m = \sqrt{k^2 - q_{mx}^2} = \frac{2\pi}{d} \sqrt{m^2 - (d/\lambda)^2}. \quad (52.9)$$

На расстоянии $z = 1/\kappa_m$ амплитуда волны убывает в e раз, ее квадрат — в e^2 раз. Наибольшее из этих расстояний порядка d . Поэтому при $z \gg d$ поле за решеткой состоит только из однородных волн.

В частности, если $d < \lambda$, то при нормальном падении поле вдали от решетки состоит только из одной плоской волны нулевого порядка ($m = 0$). Никаких боковых дифракционных максимумов не появляется. Исследование прошедшей или отраженной волны при $z \gg \frac{\lambda d}{2\pi \sqrt{\lambda^2 - d^2}}$, или практически на расстояниях $z \gg \lambda$, не даст никакой информации о структуре решетки. Рассматривая решетку в микроскоп, мы не обнаружим на ней штрихов. По той же причине свет, распространяющийся в прозрачной среде, например в кристалле, не отклоняется в стороны, хотя среда и построена из дискретных атомов или молекул — кристалл является периодической структурой и в этом смысле может рассматриваться как дифракционная решетка (фактически наблюдаемое рассеяние света вызывается неоднородностями среды и тепловыми флуктуациями). В оптическом отношении кристалл ведет себя как однородная

сплошная среда. Причина этого в том, что период молекулярной структуры кристалла меньше длины волны. Но как только нарушится это условие, появятся дифракционные максимумы. Возникнет интерференционное рассеяние волн. Такой случай реализуется в рентгеновской области спектра.

4. В непосредственной близости от решетки волновое поле имеет очень сложный вид. На расстояниях $z \gg 1/\kappa_m$ поле становится более простым, поскольку из него выпадают неоднородные волны. Однако картина поля все еще довольно сложна, так как однородные волны, из которых оно состоит, накладываются друг на друга. При удалении от решетки на некоторое минимальное расстояние плоские волны различных порядков пространственно разделяются. На сравнительно малых расстояниях от решетки к пространственно разделенным волнам различных порядков можно применять геометрическую оптику. Направления на главные максимумы излучения определяются требованием, чтобы все волны, исходящие из различных щелей решетки, при интерференции усиливали друг друга. При этом явно или неявно всегда имеется в виду, что интерференция происходит либо в фокусе собирающей линзы, либо на бесконечном расстоянии от решетки. Однако, поскольку дифрагированное поле всюду представляется суперпозицией плоских волн, условие интерференционного усиления определяет также направление распространения таких плоских волн на любых расстояниях от решетки.

5. Если в разложении пропускания D в ряд Фурье отсутствует какой-либо член, то будет отсутствовать и главный максимум соответствующего порядка в волновом поле за решеткой. Рассмотрим в качестве примера синусоидальную решетку, называемую также решеткой Рэлея. Ее пропускание определяется выражением

$$D = \alpha + \beta \cos px = \alpha + \frac{\beta}{2} (e^{ipx} + e^{-ipx})$$

с постоянными α , β и p . В этом случае световое поле за решеткой состоит из трех плоских однородных волн: неотклоненной волны (максимум нулевого порядка) с амплитудой $a_0 = \alpha A$ и двух боковых максимумов первого порядка с амплитудами $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \beta A$. Других главных максимумов не будет. Если поверхности тела придать форму синусоиды, амплитуда которой мала по сравнению с длиной волны, то такая поверхность приближенно будет вести себя как решетка Рэлея. Это удалось сделать Вуду путем травления (примерно в течение 10 с) поверхности стеклянной дифракционной решетки слабым раствором фтористоводородной кислоты. Обычные стеклянные решетки дают очень слабые спектры, так как штрихи, нанесенные алмазом, узки по сравнению со светлыми промежутками между ними. Если штрихи расширить, смочив поверхность решетки

слабой фтористоводородной кислотой, то удается достигнуть увеличения интенсивности спектров в несколько раз (до десяти).

Возможны и такие структуры, которые формально могут рассматриваться как дифракционные решетки, дающие только один максимум. Примером может служить призма. Если на одну из боковых граней призмы падает плоская монохроматическая волна, то фаза волнового поля на выходе (на второй грани призмы) будет меняться с координатой по линейному закону. Соответствующее граничное условие удовлетворяется только одной уходящей плоской волной. Это и есть волна, прошедшая через призму и отклоненная ею. Проблема отражения и преломления света на плоской границе раздела двух сред может решаться как краевая задача по методу Рэлея. При таком подходе плоская граница раздела ведет себя как дифракционная решетка, дающая только один максимум.

6. Ограниченная решетка может быть рассмотрена также методом Рэлея. В пределах решетки ее пропускаемость периодична, а вне обращается в нуль. Разложение пропускаемости в интеграл Фурье имеет вид

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(f) e^{-ifx} df. \quad (52.10)$$

Поле на выходе решетки представится выражением

$$E_{\text{вых}} = A \int_{-\infty}^{+\infty} C(f) e^{-i(k_x + f)x} df.$$

Решение, удовлетворяющее этому и всем прочим условиям задачи, имеет вид

$$E = A \int_{-\infty}^{+\infty} C(f) e^{-iqx} df, \quad (52.11)$$

где $q_x = k_x + f$, $q_y = 0$, а q_z определяется прежними формулами (52.6а). Зададим теперь пропускаемость решетки выражением

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < x < -L, \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m e^{-impx}, & \text{если } -L < x < +L, \\ 0, & \text{если } +L < x < +\infty. \end{cases} \quad (52.12)$$

Вычисляя коэффициент Фурье $C(f)$, получим

$$C(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D(x) e^{ifx} dx = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m \frac{\sin L(f - mp)}{f - mp}.$$

В результате поле за решеткой представится в виде

$$E = \sum E_m, \quad (52.13)$$

где

$$E_m = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_m \frac{\sin L(f - mp)}{f - mp} e^{-iqr} df = \frac{Ad}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_m \frac{\sin \{(N/2)(fd - 2m\pi)\}}{fd - 2m\pi} e^{-iqr} d'. \quad (52.14)$$

По-прежнему волновое поле за решеткой складывается из волн различных порядков m . Однако волна E_m уже не сводится к единственной плоской волне определенного направления, а состоит из суперпозиции *непрерывного множества* плоских волн различных направлений. Распределение интенсивности по направлениям в отдельной волне E_m определяется той же кривой, что и в волне, дифрагировавшей на щели (см. рис. 175). Интенсивность достигает максимума, когда знаменатель обращается в нуль, т. е. когда $q_x = k_x + mp = 0$. Это условие определяет направление на главный максимум m -го порядка. В рассматриваемом случае

$$\frac{\sin \{(N/2)(fd - 2m\pi)\}}{fd - 2m\pi} = \frac{N}{2},$$

а потому интенсивность волны E_m в главном максимуме пропорциональна N^2 . Когда $\sin \{(N/2)(fd - 2m\pi)\} = 0$, но $fd - 2m\pi \neq 0$, интенсивность волны обращается в нуль. Этим определяются направления на дифракционные минимумы, число которых между двумя соседними главными максимумами равно $N - 1$. Таким образом, получаются все результаты, найденные выше методом суммирования волн.

§ 53. Примеры на применение метода Рэлея

Ниже предполагается, что период решетки значительно больше длины световой волны, так что пропускаемость $D(x)$ можно вычислить в приближении геометрической оптики.

1. Начнем с плоской амплитудной решетки, состоящей из прозрачных щелей ширины b и непрозрачных промежутков между ними ширины a . В приближении геометрической оптики пропускаемость $D(x)$ равна единице на щели и нулю в промежутках между ними. Начало координат поместим в середине щели. Тогда коэффициент Фурье D_m представится выражением

$$D_m = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} D(x) e^{im\pi x} dx = \frac{1}{d} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{im\pi x} dx = \frac{b}{d} \frac{\sin(\pi mb/d)}{\pi mb/d}. \quad (53.1)$$

При вычислении интенсивности дифрагированного пучка в принципе следовало бы учесть изменение его поперечного сечения из-за наклона к плоскости решетки. Однако это было бы превышением точности, так как наши вычисления применимы лишь при малых углах дифракции, когда $\cos \vartheta \approx 1$. В этом приближении относительная интенсивность m -го дифракционного пучка $I_m = D_m^2$. (Интенсивность падающей волны принята за единицу.) Для спектра нулевого порядка $D_0 = b/d$, $I_0 = (b/d)^2$. Полная интенсивность, пропускаемая решеткой, $I_{\text{прош}} = b/d$. Разность этих величин дает суммарную интенсивность света, приходящуюся на спектры прочих порядков:

$$\frac{b}{d} = \frac{b^2}{d^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin^2 \frac{\pi mb}{d}. \quad (53.2)$$

(Это — чисто математическое соотношение, доказываемое в теории рядов Фурье.)