

где

$$E_m = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_m \frac{\sin L(f - mp)}{f - mp} e^{-iqr} df = \frac{Ad}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_m \frac{\sin \{(N/2)(fd - 2m\pi)\}}{fd - 2m\pi} e^{-iqr} d'. \quad (52.14)$$

По-прежнему волновое поле за решеткой складывается из волн различных порядков  $m$ . Однако волна  $E_m$  уже не сводится к единственной плоской волне определенного направления, а состоит из суперпозиции *непрерывного множества* плоских волн различных направлений. Распределение интенсивности по направлениям в отдельной волне  $E_m$  определяется той же кривой, что и в волне, дифрагировавшей на щели (см. рис. 175). Интенсивность достигает максимума, когда знаменатель обращается в нуль, т. е. когда  $q_x = k_x + mp = 0$ . Это условие определяет направление на главный максимум  $m$ -го порядка. В рассматриваемом случае

$$\frac{\sin \{(N/2)(fd - 2m\pi)\}}{fd - 2m\pi} = \frac{N}{2},$$

а потому интенсивность волны  $E_m$  в главном максимуме пропорциональна  $N^2$ . Когда  $\sin \{(N/2)(fd - 2m\pi)\} = 0$ , но  $fd - 2m\pi \neq 0$ , интенсивность волны обращается в нуль. Этим определяются направления на дифракционные минимумы, число которых между двумя соседними главными максимумами равно  $N - 1$ . Таким образом, получаются все результаты, найденные выше методом суммирования волн.

### § 53. Примеры на применение метода Рэлея

Ниже предполагается, что период решетки значительно больше длины световой волны, так что пропускаемость  $D(x)$  можно вычислить в приближении геометрической оптики.

1. Начнем с плоской амплитудной решетки, состоящей из прозрачных щелей ширины  $b$  и непрозрачных промежутков между ними ширины  $a$ . В приближении геометрической оптики пропускаемость  $D(x)$  равна единице на щели и нулю в промежутках между ними. Начало координат поместим в середине щели. Тогда коэффициент Фурье  $D_m$  представится выражением

$$D_m = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} D(x) e^{im\pi x} dx = \frac{1}{d} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{im\pi x} dx = \frac{b}{d} \frac{\sin(\pi mb/d)}{\pi mb/d}. \quad (53.1)$$

При вычислении интенсивности дифрагированного пучка в принципе следовало бы учесть изменение его поперечного сечения из-за наклона к плоскости решетки. Однако это было бы превышением точности, так как наши вычисления применимы лишь при малых углах дифракции, когда  $\cos \vartheta \approx 1$ . В этом приближении относительная интенсивность  $m$ -го дифракционного пучка  $I_m = D_m^2$ . (Интенсивность падающей волны принята за единицу.) Для спектра нулевого порядка  $D_0 = b/d$ ,  $I_0 = (b/d)^2$ . Полная интенсивность, пропускаемая решеткой,  $I_{\text{прош}} = b/d$ . Разность этих величин дает суммарную интенсивность света, приходящуюся на спектры прочих порядков:

$$\frac{b}{d} = \frac{b^2}{d^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin^2 \frac{\pi mb}{d}. \quad (53.2)$$

(Это — чисто математическое соотношение, доказываемое в теории рядов Фурье.)

Относительная доля дифрагированного света будет

$$\frac{I_{\text{прош}} - I_0}{I_{\text{прош}}} = 1 - \frac{b}{d}. \quad (53.3)$$

Она максимальна и стремится к единице, когда  $b/d \rightarrow 0$ . Однако в этом случае сама интенсивность  $I_{\text{прош}}$  также стремится к нулю. Интенсивность  $m$ -го дифракционного пучка равна

$$I_m = D_m^2 = I_0 \left[ \frac{\sin(\pi m b/d)}{\pi m b/d} \right]^2. \quad (53.4)$$

Когда  $b/d \rightarrow 0$ , интенсивности всех дифракционных пучков становятся одинаковыми и равными  $I_0$ . Однако, как уже отмечено выше, в этом случае каждая из этих интенсивностей сама стремится к нулю.

Если  $\pi m b/d = n\pi$ , т. е.  $b/d = n/m$ , где  $n$  — целое число, меньшее  $m$  и взаимно простое с ним, то обращаются в нуль интенсивности спектров с порядками  $m$ ,  $2m$ ,  $3m$ , ... Так, при  $b/d = 1/2$  пропадают все спектры четных порядков. Смысл этого результата, как уже отмечалось в § 46, станет очевидным, если заметить, что условие  $m$ -го главного максимума  $d \sin \vartheta = m\lambda$  умножением на  $b/d = n/m$  преобразуется в  $b \sin \vartheta = n\lambda$ , т. е. в условие  $n$ -го дифракционного минимума при дифракции на отдельной щели. Таким образом, под углом  $\vartheta$  каждая щель, а потому и решетка в целом света не посылают.

2. Рассмотрим более общий случай. Допустим, что на участках длины  $b$  пропускательность решетки равна  $\beta$ , а на участках длины  $a$  она равна  $\alpha$ . Величины  $\alpha$  и  $\beta$  постоянны, но могут быть комплексными. Таким образом, решетка является *амплитудно-фазовой*. Когда  $\alpha$  и  $\beta$  — числа вещественные, то решетка будет *амплитудной*. Если же они — числа вида  $e^{i\rho}$  ( $\rho$  вещественно), то решетка становится *чисто фазовой*. Рассматриваемая амплитудно-фазовая решетка эквивалентна плоскопараллельной пластинке с пропускательностью  $\alpha$  и наложенной на нее дифракционной решетке. Пропускательность последней на участках  $b$  равна  $(\beta - \alpha)$ , а на участках  $a$  — нулю. Разумеется, величины  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $a$  и  $b$  можно поменять местами и получить вторую эквивалентную систему. Математически обе системы отличаются одна от другой только обозначениями, а потому достаточно рассмотреть лишь одну из них, например, первую.

Вычисление коэффициентов Фурье  $D_m$  сводится к предыдущей задаче. Для плоскопараллельной пластинки все коэффициенты Фурье обращаются в нуль, за исключением нулевого, который равен  $\alpha$ . Поэтому, поместив начало координат в центре одного из отрезков  $b$  и воспользовавшись формулой (53.1), получим

$$D_m = (\beta - \alpha) \frac{b}{d} \frac{\sin(\pi m b/d)}{\pi m b/d} + \alpha \delta_m, \quad (53.5)$$

где  $\delta_m = 1$  при  $m = 0$  и  $\delta_m = 0$  при  $m \neq 0$ . При  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  получаются результаты предыдущей задачи.

3. Рассмотрим теперь частные случаи чисто амплитудной и чисто фазовой решеток. Для амплитудной решетки величины  $\alpha$  и  $\beta$  вещественны и положительны. Все коэффициенты  $D_m$  также вещественны. Знаки этих коэффициентов, начиная с  $m = \pm 1$ , чередуются. Коэффициенты нулевого и первого порядков могут иметь одинаковые или противоположные знаки в зависимости от соотношения между пропускательностями  $\alpha$  и  $\beta$ . В случае чисто фазовой решетки пропускательности  $\alpha$  и  $\beta$  имеют вид  $e^{i\rho}$ . Так как существенна только разность фаз между волнами, исходящими из участков  $a$  и  $b$ , то без ущерба для общности можно положить  $\alpha = 1$ ,  $\beta = e^{i\rho}$ . Тогда из формулы (53.5) находим

$$D_m = (e^{i\rho} - 1) \frac{b}{d} \frac{\sin(\pi m b/d)}{\pi m b/d} \quad (m \neq 0), \quad (53.6)$$

$$D_0 = (e^{i\rho} - 1) \frac{b}{d} + 1. \quad (53.7)$$

Как и в случае амплитудной решетки, коэффициенты Фурье  $D_m$ , начиная с  $m = \pm 1$ , попеременно меняют знаки. Никакого дополнительного сдвига фаз между этими коэффициентами нет.

Качественное отличие фазовой решетки от амплитудной состоит в том, что в случае фазовой решетки имеется дополнительный сдвиг фаз  $\varphi$  между спектром нулевого и спектрами всех прочих порядков. Чтобы его вычислить, найдем из формул (53.6) и (53.7) комплексное отношение  $D_m/D_0$ . Аргумент этого комплексного числа и будет  $\varphi$ . Простое вычисление дает

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b+a}{b-a} \frac{\sin \rho}{1 - \cos \rho}. \quad (53.8)$$

Сдвиг фаз  $\varphi$  один и тот же для всех порядков  $m$ . Так как после дифракции на решетке спектры различных порядков пространственно разделяются на независимые пучки, то можно оказывать воздействие на каждый из них, не меняя при этом амплитуды и фазы всех остальных пучков. Например, если на пути нулевого пучка поставить прозрачную пластинку, которая изменила бы его фазу на  $\varphi$ , то фазовые соотношения между дифрагированными пучками будут такими же, как и у амплитудной решетки. С введением такой пластинки фазовая решетка действует как амплитудная. На этом основан *метод фазового контраста*, используемый в микроскопии (см. § 59).

Отметим два частных случая. Во-первых, случай  $a = b$ . Тогда формула (53.8) дает  $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ , т. е.  $\varphi = \pi/2$ . Во-вторых, случай малых значений  $\rho$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{b+a}{b-a} \frac{2}{\rho},$$

т. е.  $\operatorname{tg} \varphi$  очень велик, а самый угол  $\varphi$  практически равен  $\pi/2$ . В обоих случаях для превращения фазовой решетки в амплитудную на пути нулевого пучка или на пути всех прочих дифрагированных пучков достаточно ввести пластинку, вносящую дополнительную разность фаз  $\pm \pi/2$ .

4. В качестве последнего примера рассмотрим фазовую решетку, профиль штрихов которой показан на рис. 205. Поперечное сечение штриха имеет форму треугольника, одна сторона которого длинная и пологая, а другая — короткая

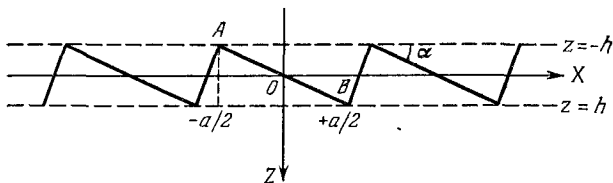


Рис. 205.

и крутая. Такая решетка интересна тем, что при определенных условиях она может концентрировать основную часть света в спектре одного порядка. Решетка может действовать и как пропускающая, и как отражательная. Ради определенности разберем действие пропускающей решетки.

Поместим начало координат  $O$  в середине длинной стороны  $AB$ . Пусть  $a$  — длина проекции длинной, а  $b$  — короткой стороны на направление оси  $X$ . Если  $b \ll a$ , то в интеграле (53.1) можно пренебречь вкладом, вносимым короткой стороной. В этом приближении можно положить  $a = d$  и вычислить пропускаемость решетки только на участке  $a$ . Влияние пропускаемости участка  $b$  практически не отразится на результатах. Пусть волна падает перпендикулярно к плоскости  $XU$  и в воздухе представляется выражением  $E = E_0 e^{-ikz}$ . На входе, т. е. в плоскости  $z = -h$ , поле представляется выражением  $E_{\text{вх}} = E_0 e^{ikh}$ . Чтобы вычислить поле на выходе при  $z = +h$ , можно, ввиду малости угла наклона  $\alpha$ ,

пренебречь преломлением. Если  $z_0$  — текущая координата точки на прямой  $AB$ , то поле на выходе в лежащей под ней точкой будет равно

$$E_{\text{вых}} = E_0 e^{-ikz_0} \cdot e^{-ikn(h-z_0)} = e^{i\delta} e^{ik(n-1)z_0} E_{\text{вх}},$$

где  $\delta$  — некоторая постоянная. Постоянный фазовый множитель  $e^{i\delta}$  не играет роли и может быть отброшен. Таким образом, пропускаемость решетки  $D = e^{ik(n-1)z_0}$ , или после подстановки  $z_0 = x \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha x$

$$D(x) = e^{ik(n-1)\alpha x}.$$

Коэффициенты Фурье  $D_m$  вычисляем по формуле (53.1) и находим

$$D_m = \frac{\sin \pi [m + (d/\lambda)(n-1)\alpha]}{\pi [m + (d/\lambda)(n-1)\alpha]}. \quad (53.9)$$

Если знаменатель этого выражения обращается в нуль, то почти весь свет сконцентрируется в спектре порядка  $m$ . Для этого должно быть  $m + (d/\lambda)(n-1)\alpha = 0$ . С другой стороны,  $d \sin \vartheta = m\lambda$ , или, ввиду малости угла дифракции,  $d \cdot \vartheta = m\lambda$ . Исключая  $m$ , получаем

$$\vartheta = -(n-1)\alpha. \quad (53.10)$$

Эта формула показывает, что угол  $\vartheta$  равен углу отклонения луча при преломлении в призме с малым преломляющим углом  $\alpha$ . Таким образом, почти весь свет может сконцентрироваться в одном направлении, если это направление совпадает с направлением преломленных лучей. Для концентрации необходимо, чтобы разность хода между пучками, преломленными на соседних ступеньках решетки, составляла целое число волн. С подобной концентрацией дифрагированного света в спектре одного порядка мы столкнулись также в § 48 при изучении эшелона Майкельсона.

## § 54. Голография

1. Применим метод Рэлея для уяснения идеи *голографии*, т. е. безлинзового получения оптических изображений путем так называемого *восстановления волнового фронта*. В принципе идея голографии была выдвинута и экспериментально проверена польским физиком М. Вольфке (1883—1947). Его работа была опубликована еще в 1920 г., но была забыта. Эту идею независимо от Вольфке вновь предложил и обосновал в 1947 г. английский инженер и физик Габор (р. 1900), который по праву считается изобретателем голографии. Однако понадобилось 15 лет, чтобы стало возможно практическое осуществление голографии. Причина столь длительной задержки заключается в том, что в голографии требуются источники света, обладающие *высокой степенью временной и пространственной когерентности*. Таких источников в 1947 г. еще не существовало. Положение изменилось в 1960 г. с изобретением лазеров и проникновением их в лабораторную технику. Первые изображения по методу голографии были получены американцами Лейтом и Упатниексом в 1962 г.

При освещении или просвечивании предмета от него распространяется рассеянная или прошедшая волна. (Для определенности в дальнейшем предполагается, что предмет освещается, а не просвечивается, хотя принципиального различия между этими случаями