

она лежит за фокусом, то $nR = R \cos \vartheta$. По формуле (55.2)

$$E_p = 2\pi e^{i\omega t} \int_0^\beta e^{\pm ikR \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2\pi e^{i(\omega t \pm kR)}}{\pm ikR} [1 - e^{\pm ikR (\cos \beta - 1)}],$$

где верхний знак относится к случаю, когда точка наблюдения расположена левее, а нижний — правее фокуса. Вычислив модуль этого выражения, находим амплитуду колебаний поля на оси пучка:

$$a \sim \frac{1}{R} \sin \frac{kR(1 - \cos \beta)}{2}. \quad (55.7)$$

Во всякой плоскости, перпендикулярной к оси пучка, дифракционная картина имеет вид концентрических колец. Однако, в зависимости от положения этой плоскости, центр пучка может быть и светлым, и темным. Амплитуда на оси обращается в нуль, когда $kR(1 - \cos \beta) = m\pi$, т. е.

$$R = \frac{m\lambda}{1 - \cos \beta} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (55.8)$$

В этом случае, как легко убедиться, в неприкрытой части сферического волнового фронта содержится четное число зон Френеля, а потому центр колец и получается темным. Расстояние между ближайшими минимумами интенсивности, расположенными по разные стороны от фокуса, равно

$$\delta = \frac{2\lambda}{1 - \cos \beta} \approx \frac{4\lambda}{\beta^2}. \quad (55.9)$$

Эта величина может служить мерой продольных размеров области, в которой концентрируется свет вблизи фокуса. Объем этой области порядка $\frac{4\lambda}{\beta^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2 = \frac{4\lambda^3}{\beta^4}$.

§ 56. Разрешающая способность телескопа и микроскопа

1. Будем предполагать, что оптические системы идеальны в смысле геометрической оптики, т. е. дают строго точечные изображения каждой точки объекта. По волновой оптике это не так. Как показано в предыдущем параграфе, изображением светящейся точки в сопряженной плоскости является дифракционная картина, состоящая из концентрических колец, окружающих центральный светлый дифракционный кружок. Распределение интенсивности в такой картине представлено сплошной кривой на рис. 181. Основная доля энергии света (около 84%) приходится на центральный дифракционный кружок. Этот кружок и будет изображением светящейся точки, если пренебречь энергией, приходящейся на окружающие его дифракционные кольца. Он называется *кружком Эйри* по имени

ученого, впервые рассчитавшего дифракционную картину Фраунгофера от круглого отверстия.

Конечный объект можно рассматривать как совокупность точечных источников, каждый из которых изображается кружком Эйри (1801—1892) с окружающими его дифракционными кольцами. Изображение объекта есть наложение таких кружков и дифракционных колец. Задача теории сводится к расчету распределения интенсивности света в такой картине. Следует различать два предельных случая: 1) *точечные источники некогерентны*; 2) *точечные источники когерентны*. В первом случае складываются *интенсивности* волновых полей, во втором — их *напряженности*. Приблизительно первый случай реализуется для *самосветящихся*, второй — для освещаемых объектов. Первый случай имеет основное значение в теории телескопа, а второй — микроскопа.

В простейшем случае сложный объект состоит из двух точечных источников S_1 и S_2 (рис. 211). Если расстояние между центрами кружков Эйри от этих точечных источников мало по сравнению с размерами самих кружков, то распределение интенсивности света

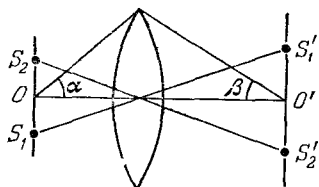


Рис. 211.

в изображении будет мало отличаться от того, которое получилось бы только от одного точечного источника. Глаз не сможет решить, является ли объект точечным или состоит из нескольких близко расположенных светящихся точек. Говорят, что в этом случае светящиеся точки *не разрешаются* оптическим прибором. При увеличении расстояния между S_1 и S_2 будет увеличиваться и расстояние между центрами соответствующих им кружков Эйри S'_1 и S'_2 , тогда как размеры самих кружков останутся неизменными. Начиная с некоторого минимального расстояния $l = l_{\text{мин}}$ на кривой распределения интенсивности в ее центре появится провал, который сможет зарегистрировать глаз или другой приемник света. Тогда говорят, что светящиеся точки S_1 и S_2 *разрешаются* оптическим прибором. Величина $l_{\text{мин}}$ называется *разрешаемым расстоянием прибора* (объектива), а обратная ему величина $1/l_{\text{мин}}$ — *разрешающей способностью*.

Точно указать величину $l_{\text{мин}}$ невозможно. Она в значительной степени зависит от индивидуальных особенностей глаза или другого приемника излучения. Речь может идти только о рациональной оценке $l_{\text{мин}}$. Согласно Рэлею, за $l_{\text{мин}}$ принимается такое расстояние между светящимися точками S_1 и S_2 , при котором расстояние между центрами кружков Эйри равно радиусу одного кружка. В этом случае центр дифракционной картины от одной светящейся точки будет накладываться на первый дифракционный минимум дифракционной картины от второй светящейся точки. Такой кри-

терий аналогичен критерию спектрального разрешения, предложенному также Рэлеем (см. § 47).

2. Для исследования вопроса о применимости критерия Рэля к различным условиям наблюдения надо рассчитать распределение интенсивности света в плоскости изображения двух точечных источников света S_1 и S_2 . С этой целью можно воспользоваться формулами предыдущего параграфа. Если источники S_1 и S_2 некогерентны, то надо сложить интенсивности создаваемых ими дифракционных картин. Если же они когерентны, то надо складывать волновые поля, а затем вычислять интенсивность результирующего волнового поля. Распределение интенсивности света в плоскости изображения в случае одной светящейся точки представлено сплошной кривой на рис. 181. Для нахождения распределения интенсивности света в случае двух одинаковых светящихся точек S_1 и S_2 применим графический метод.

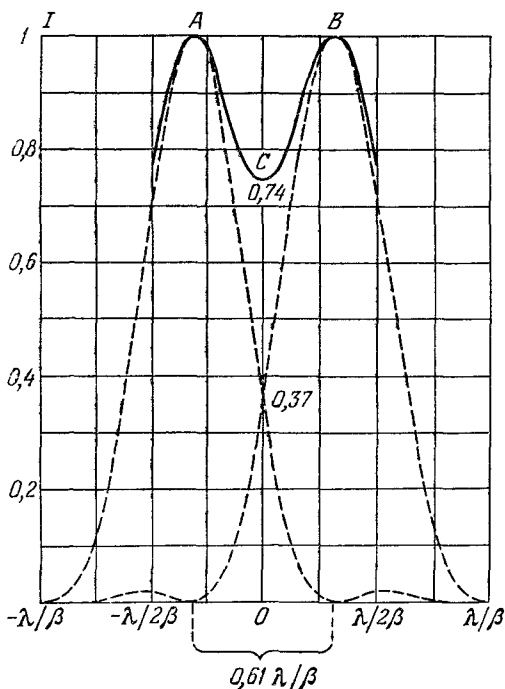


Рис. 212.

Рассмотрим сначала случай, когда источники S_1 и S_2 некогерентны. На-рис. 212 пунктирные кривые представляют распределение интенсивности в плоскости изображения для каждого из точеч-

ных источников. Расстояние между центрами дифракционных картин предполагается равным $0,61 \lambda/\beta$, т. е. радиусу кружка Эйри, как этого требует критерий Рэлея на пределе разрешения (угол β имеет тот же смысл, что и в предыдущем параграфе). Результирующая интенсивность получается сложением ординат обеих пунктирных кривых и изображена сплошной линией. В центре C она имеет провал, где интенсивность составляет 74% от максимальной интенсивности. Между тем средний глаз уверенно обнаруживает наличие провала уже тогда, когда интенсивность в центре составляет около 85%. Таким образом, можно считать, что при выбранном расстоянии между светящимися точками получится разрешение. С другой стороны, сближая пунктирные кривые, легко установить, что провал исчезает, когда расстояние между центрами кружков Эйри уменьшается до λ/β , что очень мало отличается от рэлеевского предела $0,61 \lambda/\beta$. В этом случае разрешения нет. Таким образом, в случае некогерентных точечных источников света при визуальном наблюдении критерий Рэлея дает практически необходимое и достаточное условие для их разрешения.

3. Рассмотрим теперь случай, когда источники S_1 и S_2 когерентны. В качестве таких источников можно взять, например, два малых отверстия в непрозрачном экране, освещаемые когерентным светом (рис. 213). Такие отверстия ведут себя как точечные когерентные источники, излучающие вторичные волны Гюйгенса. Пусть отверстия освещаются пучком параллельных лучей, наклоненных под углом ϑ к нормали к плоскости экрана. Если l — расстояние между центрами отверстий, то разность фаз между волнами, приходящими в эти отверстия, будет $\Delta = (2\pi/\lambda) l \sin \vartheta$. Такова же будет и разность фаз между колебаниями, приходящими в центр дифракционной картины, т. е. в точку, расположенную посередине между центрами кружков Эйри от источников S_1 и S_2 . Интенсивность света в этой точке представится выражением

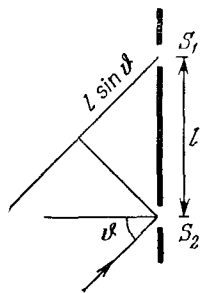


Рис. 213.

$$I_C = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta = 2I_1 (1 + \cos \Delta) = 4I_1 \cos^2 \frac{\Delta}{2}.$$

Принципиальное отличие от случая некогерентных источников света состоит в появлении дополнительного — интерференционного — члена. Это сказывается на критерии разрешения и на разрешающей способности объектива. Меняя угол наклона ϑ , можно повысить разрешающую способность объектива.

Если свет, освещающий отверстия S_1 и S_2 , падает нормально к плоскости экрана, то $\Delta = 0$ и, следовательно, $I_C = 4I_1$. Допустим, что в этом случае расстояние между центрами дифракционных

кружков Эйри равно радиусу одного кружка, т. е. наименьшему расстоянию, которое требуется критерием Рэлея для разрешения светящихся точек. Тогда, как мы видели, интенсивность I_1 составляет 37% от максимальной интенсивности, которую создает в центре кружка Эйри только один источник света. Поэтому результирующая интенсивность в центре дифракционной картины будет равна

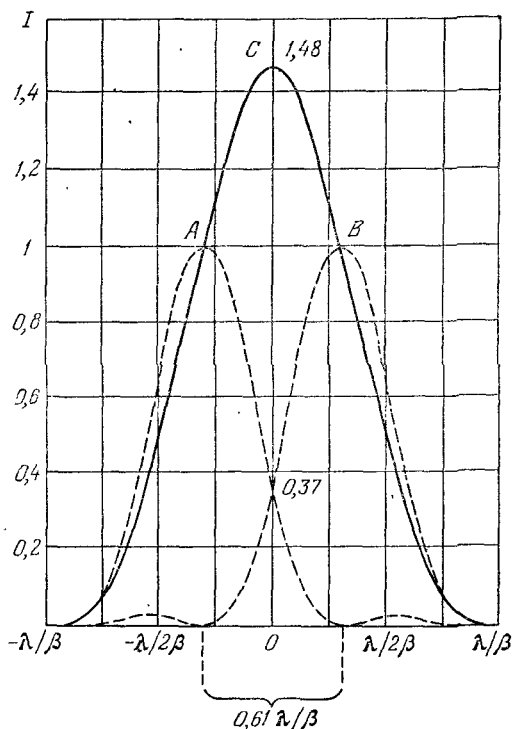


Рис. 214.

$4 \cdot 37 = 148\%$ от той же максимальной интенсивности. Распределение интенсивности света для рассматриваемого случая представлено на рис. 214. Пунктирные кривые по-прежнему представляют интенсивности от каждого из источников S_1 и S_2 в отдельности, а сплошная кривая — результирующую интенсивность. На кривой результирующей интенсивности имеется всего лишь один максимум C . Поэтому никакого раздельного изображения светящихся точек в рассматриваемом случае получиться не может. Для этого необходимо развести центры кружков Эйри на расстояние, превышающее рэлеевский предел примерно в $1,2$ раза.

Перейдем теперь к рассмотрению наклонного освещения. Если $\Delta = \pi/2$, т. е. разность хода между лучами, освещающими отверстия S_1 и S_2 , равна $\lambda/4$, то $\cos \Delta = 0$. Интерференционный член пропадает, и получается в точности такое же распределение интенсивности света, а с ним и тот же критерий разрешения, что и в случае некогерентных светящихся точек. Если $\Delta = \pi$, а следовательно, $l = \lambda/(2 \sin \vartheta)$, что возможно лишь при $l \geq \lambda/2$, то в центре дифракционной картины всегда получается нулевая интенсивность,

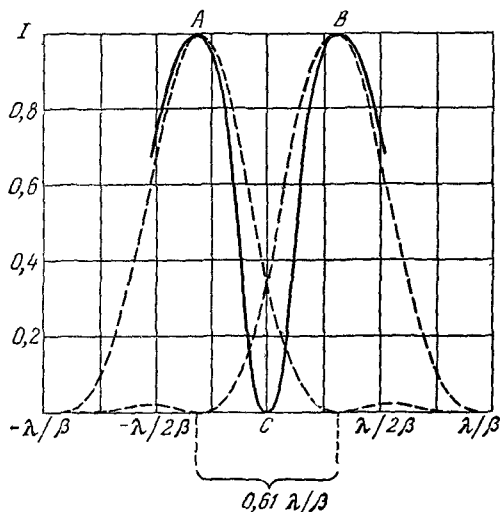


Рис. 215.

а потому разделение максимумов выражено особенно отчетливо. На рис. 215 представлено распределение интенсивностей для рассматриваемого случая в предположении, что центры кружков Эйри разведены до рэлеевского предела. При скользящем падении лучей эти центры можно сблизить примерно вдвое по сравнению с рэлеевским пределом, и все же провал на кривой интенсивности сохранится. Таким образом, применение наклонного освещения приводит к повышению разрешающей способности. При скользящем падении разрешающая способность возрастает почти вдвое по сравнению со случаем некогерентных светящихся точек.

Легко теперь сообразить, что следует ожидать при освещении объекта лучами всевозможных направлений от протяженного источника света. Нормально падающим лучам соответствует наименьшая разрешающая способность и наибольшее разрешаемое расстояние, превосходящее соответствующее расстояние для некогерентных светящихся точек. При возрастании угла наклона лучей разрешаемое расстояние уменьшается. При угле наклона, когда разность фаз Δ становится равной $\pi/2$, оно такое же, что и для некогерентных источников. При дальнейшем увеличении наклона разрешаемое расстояние продолжает монотонно уменьшаться и при скользящем падении становится почти вдвое меньше соответствующего расстояния для некогерентных источников. Естественно поэтому ожидать, и это подтверждается расчетом, что при освещении широкими пучками лучей получится такое же распределение интенсивности света в дифракционной картине и такой

и потому разделение максимумов выражено особенно отчетливо. На рис. 215 представлено распределение интенсивностей для рассматриваемого случая в предположении, что центры кружков Эйри разведены до рэлеевского предела. При скользящем падении лучей эти центры можно сблизить примерно вдвое по сравнению с рэлеевским пределом, и все же провал на кривой интенсивности сохранится. Таким образом, применение наклонного освещения приводит к повышению разрешающей способности. При скользящем падении

же критерий разрешения, что и при некогерентных источниках света.

Таким образом, разрешаемое расстояние меняется с изменением условий освещения и должно рассматриваться как ориентировочное. При этом надо еще раз подчеркнуть, что полученные результаты относятся к визуальным наблюдениям. Применение других физических методов исследования может понизить разрешаемый предел.

4. В случае телескопа рассматриваемые объекты, например компоненты двойной звезды, всегда излучают *некогерентно*. Для телескопа интерес представляет не линейное, а *угловое разрешаемое расстояние*. Если ϑ — угловое расстояние между рассматриваемыми звездами (рис. 216), то расстояние между центрами соответствующих кружков Эйри в фокальной плоскости будет $x = S'_1 S'_2 = f\vartheta$, где f — фокусное расстояние объектива. Согласно критерию Рэля, для разрешения звезд это расстояние должно быть не меньше $0,61\lambda/\beta$, т. е. $f\vartheta \geq 0,61\lambda/\beta$. Учитывая, что для небольших углов $f\beta = D/2$, где D — диаметр объектива, отсюда получим

$$\vartheta \geq 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (56.1)$$

Разрешаемое угловое расстояние равно

$$\vartheta_{\text{мин}} = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (56.2)$$

Глаз при рассматривании удаленных предметов действует принципиально так же, как объектив телескопа. Поэтому формулы (56.1) и (56.2) применимы и к глазу. Роль D играет диаметр зрачка глаза d . Полагая $d = 4$ мм, $\lambda = 550$ нм, находим для разрешаемого расстояния человеческого глаза

$$\vartheta_{\text{г.л}} = 1,22 \frac{\lambda}{d} = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 35''. \quad (56.3)$$

Этот результат удивительно хорошо согласуется с физиологической оценкой разрешающей способности глаза (см. § 21, пункт 7). Достойна восхищения способность живого организма приспособляться к окружающим условиям и в процессе эволюции достигать максимума того, что принципиально допускается законами природы.

Таким образом, разрешающая способность телескопа пропорциональна диаметру его объектива. Крупнейший в мире действующий телескоп-рефлектор (см. § 24) имеет диаметр параболического зеркала $D = 6$ м. Теоретическая разрешающая сила его превос-

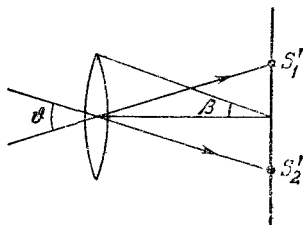


Рис. 216.

ходит разрешающую силу глаза в $6000/4 = 1500$ раз. Теоретическое разрешаемое расстояние составляет $35''/1500 = 0,023''$. Для второго по величине телескопа-рефлектора Маунт-Паломарской обсерватории с диаметром зеркала 5 м теоретическое разрешаемое расстояние равно $0,028''$. Разрешающей способности таких гигантских телескопов достаточно, чтобы изображения звезд с наибольшими угловыми размерами получались уже в виде дисков, подобно изображениям планет.

Однако наличие земной атмосферы не позволяет полностью использовать разрешающую способность телескопа. Нерегулярные процессы в атмосфере, сопровождающиеся изменениями показателя преломления на пути световых лучей, портят изображения и снижают реальную разрешающую способность телескопов до величин порядка $1'' - 0,5''$, причем особенно сильно это снижение сказывается на больших телескопах. Такая разрешающая способность может быть достигнута с помощью много меньших объективов. Большие телескопы строятся не с целью повышения разрешающей способности, а для *увеличения количества света*, поступающего в телескоп от наблюдаемых небесных объектов. Оно пропорционально площади отверстия объектива. Поэтому с помощью больших телескопов можно обнаружить и сфотографировать более слабые небесные объекты, чем с помощью малых. Для повышения же разрешающей способности астрономических телескопов необходимо исключить вредное влияние атмосферы. Большие перспективы открываются перед телескопами, устанавливаемыми на космических кораблях, а еще лучше — на Луне.

5. Увеличение телескопа должно быть согласовано с разрешающей способностью его объектива. Допустим, что угловой размер предмета равен минимальному углу $\vartheta_{\text{мин}}$, разрешаемому объективом телескопа. Если угловое увеличение телескопа равно N , то в телескоп предмет будет виден под углом $N\vartheta_{\text{мин}}$. Для полного использования разрешающей способности телескопа необходимо, чтобы этот угол разрешался глазом, т. е. должно быть $N\vartheta_{\text{мин}} \geq \vartheta_{\text{гл}}$. Подставляя сюда значения $\vartheta_{\text{мин}}$ и $\vartheta_{\text{гл}}$ из формул (56.2) и (56.3), получим

$$N \geq \frac{D}{d} \equiv N_{\text{норм}}, \quad (56.4)$$

где $N_{\text{норм}}$ — нормальное увеличение телескопа (см. § 23, пункт 4).

В § 11 (пункт 10) было показано, что $N = D/h$, т. е. увеличение телескопа равно отношению ширины D падающего параллельного пучка лучей к ширине h выходящего пучка. Когда увеличение меньше нормального, т. е. $D/h < D/d$, то $h > d$. Значит, не весь пучок параллельных лучей, падающий на объектив, попадает в зрачок глаза, а только часть его. Действующей является только центральная часть объектива, диаметр которой меньше D . Телескоп действует так, как если бы его объектив и разрешающая способность умень-

шились. При нормальном увеличении $h = d$, разрешающая способность объектива согласована с разрешающей способностью глаза. Наконец, когда увеличение больше нормального, т. е. $D/h > D/d$, то $h < d$. В этом случае глаз действует так, как если бы его зрачок сузился, а разрешающая способность понизилась.

Применение увеличений больше нормального не может выявить новые детали рассматриваемого объекта. Увеличения, значительно превосходящие нормальное, приносят только вред, поскольку чрезмерное сужение выходящего пучка может внести в изображение значительные дифракционные искажения. Однако по физиологическим причинам иногда бывает полезно брать увеличения, превосходящие нормальное в 2—4 раза. Рассматривая детали на пределе разрешающей способности, глаз работает с напряжением и быстро утомляется, его чувствительность и разрешающая способность понижаются. Применение увеличений, несколько превышающих нормальное, не выявляет новых подробностей в строении рассматриваемых объектов, но позволяет рассматривать их с меньшим напряжением. К таким же выводам мы пришли в § 23 из фотометрических соображений.

6. Вопрос о разрешающей способности микроскопа решается так же, как и для телескопа. Критерий разрешения Рэлея в этом случае требует

$$l' \geq 0,61 \frac{\lambda}{\beta}, \quad (56.5)$$

где l' — расстояние между центрами кружков Эйри для рассматриваемых двух светящихся точек (предполагается, что апертурный угол со стороны изображения 2β мал). Чтобы перейти к линейным размерам самого объекта, следует воспользоваться условием синусов Аббе, которое должно выполняться для объектива всякого микроскопа. При малых углах β (рис. 217) оно может быть написано в виде $ln \sin \alpha = l'\beta$, где n — показатель преломления пространства объектов, а 2α — апертурный угол со стороны этого пространства. Исключая β и l' , приходим к соотношению

$$l \geq 0,61 \frac{\lambda}{n \sin \alpha}, \quad (56.6)$$

которое и определяет предел разрешения микроскопа. Минимальное разрешаемое расстояние (с точностью до небольшого численного коэффициента) равно

$$l_{\text{мин}} = 0,61 \frac{\lambda}{n \sin \alpha}. \quad (56.7)$$

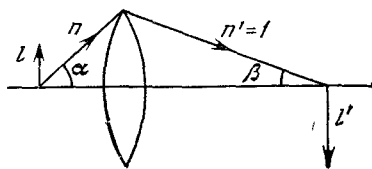


Рис. 217.

Этот предел разрешения определяется *волновой природой света* и не может быть превзойден никакими техническими усовершенствованиями микроскопа. При прочих равных условиях предел разрешения тем меньше, чем короче длина волны. Наличие в знаменателе показателя преломления n объясняется тем, что разрешаемое расстояние может непосредственно зависеть от длины волны не в вакууме, а в той среде, где находится объект, т. е. от величины λ/n .

Нетрудно проверить, что при малых апертурах формула (56.7) переходит в формулу (56.2), определяющую разрешающую способность телескопа. В этом случае обе формулы отличаются одна от другой только по форме. В формуле (56.7) разрешаемое расстояние выражено в линейных единицах, а в формуле (56.2) — в угловых.

Для повышения разрешающей способности микроскопа можно идти двумя путями: 1) уменьшать длину волны (переход к ультрафиолету); 2) увеличивать числовую апертуру объектива микроскопа $n \sin \alpha$. Таким образом, угол α должен быть как можно больше. В лучших современных объективах он практически достиг своего теоретического предела $\alpha = \pi/2$. Для повышения числовой апертуры применяют также иммерсию, т. е. жидкость с возможно высоким показателем преломления, заполняющую пространство между покровным стеклом и фронтальной линзой объектива (см. § 18, пункт 4). Если принять $n \approx 1,5$, то максимальное значение числовой апертуры будет $n \sin \alpha \approx 1,5$. Применение иммерсии, таким образом, позволяет снизить разрешаемый предел примерно в полтора раза, т. е. довести его до величины $l \approx 0,61\lambda/1,5 \approx 0,4\lambda$. Детали объекта, размеры которых меньше примерно $0,4\lambda$, принципиально не могут быть выявлены с помощью микроскопа. Ни при каком увеличении нельзя определить форму объекта, рассматривая его в микроскоп; если размеры самого объекта меньше приблизительно $0,4\lambda$. Разумеется, с помощью микроскопа можно обнаружить объекты и много меньших размеров, если только они светятся достаточно ярко (ультрамикроскоп). Нельзя определить только их форму.

Радикальное повышение разрешающей способности достигается в электронном микроскопе, где роль световых лучей выполняют электроны, фокусируемые электрическими и магнитными линзами. Электроны ведут себя подобно волнам с длиной волны

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\mathcal{E}}},$$

где h — постоянная Планка, m — масса, p — импульс, \mathcal{E} — энергия электрона. Эти волны называются *волнами де Бройля* (р. 1892). При $\mathcal{E} = 10\,000$ эВ приведенная формула дает $\lambda = 0,0122$ нм. Такая длина волны на порядок меньше размеров атома. Однако такое разрешение в электронном микроскопе не достигается, так как для уменьшения геометрических aberrаций в электронных

микроскопах приходится пользоваться узкими параксиальными пучками с малыми апертурами. Но даже в таких пучках электронный микроскоп позволяет разрешать детали, превосходящие размеры атомов всего в несколько раз.

7. Рассмотрим в заключение вопрос о рациональном увеличении микроскопа. Напомним, что увеличением микроскопа (лупы) называется отношение угла, под которым виден объект в микроскоп, к тому углу, под которым он был бы виден невооруженным глазом, если бы был помещен на расстоянии ясного зрения. Пусть $l_{\text{мин}}$ — минимальное расстояние, разрешаемое микроскопом. Невооруженным глазом с расстояния ясного зрения оно видно под углом $\vartheta = l_{\text{мин}}/L$. В микроскоп то же расстояние видно под углом $\vartheta' = N\vartheta$. Для разрешения необходимо, чтобы угол ϑ' был не меньше минимального угла, разрешаемого глазом, т. е. $\vartheta' = N\vartheta \geq \vartheta_{r.1}$. Отсюда, используя выражения (56.3) и (56.7), найдем

$$N \geq \frac{2Ln \sin \alpha}{d}. \quad (56.8)$$

Знаку равенства соответствует нормальное увеличение

$$N_{\text{норм}} = \frac{2Ln \sin \alpha}{d}. \quad (56.9)$$

Как и в случае телескопа, нормальное увеличение микроскопа есть наименьшее увеличение, при котором может быть использована вся разрешающая способность объектива. О целесообразности работать при увеличениях больше нормального для микроскопа можно повторить без всяких изменений все, что выше было сказано относительно телескопа.

Максимальная числовая апертура, как указывалось выше, для сухих систем имеет своим пределом единицу. Для иммерсионных систем этот предел равен примерно 1,5. Диаметр зрачка глаза d примем равным 2 мм. Тогда для нормального глаза ($L = 25$ см) получатся следующие предельные значения нормальных увеличений:

$$\begin{aligned} \text{для сухих систем } N_{\text{норм}} &= 250, \\ \text{для иммерсионных систем } N_{\text{норм}} &= 375. \end{aligned}$$

По физиологическим соображениям имеет смысл переходить к несколько большему увеличению. Однако бессмысленно строить микроскопы с увеличением больше, чем в 1000—1500 раз.

§ 57. Теория и демонстрационные опыты Аббе

1. Впервые предел разрешения объектива микроскопа был найден Гельмгольцем в 1874 г. Гельмгольц рассматривал *самосветящиеся объекты*. Примерно в то же время и независимо от Гельмгольца вопрос о разрешающей способности микроскопа был разобран