

в систему вертикальных полос. Если щель повернуть на  $90^\circ$  в вертикальное положение (рис. 221, б), то полосы сделаются горизонтальными. Если щель повернуть параллельно диагонали сетки (рис. 221, в и 221, г), то она выделит прямолинейный ряд максимумов, параллельный той же диагонали, причем расстояния между максимумами увеличатся в  $\sqrt{2}$  раз. В результате оптическое изображение сетки перейдет в систему наклонных полос, перпендикулярных к щели, а сами полосы сделаются в  $\sqrt{2}$  раз уже.

Д. С. Рождественский указал, что непосредственной причиной появления ложных структур в опытах Аббе является *дифракция света на экранирующей сетке*. В отсутствие последней объектив дает геометрически подобное изображение объекта. Например, сетка из параллельных проволок изображается в виде системы параллельных полос. При введении экранирующей сетки эти полосы остаются на прежних местах. Но на них накладывается дифракционная картина, возникающая при дифракции света на экранирующей сетке. Если экранирующая сетка состоит из проволок, параллельных проволокам сетки-объекта, то возникнут дифракционные полосы, параллельные полосам в прежнем изображении сетки-объекта. При надлежащем периоде экранирующей сетки дифракционные полосы расположатся посередине между прежними полосами. Произойдет удвоение полос в изображении, как если бы проволоки в сетке-объекте были натянуты вдвое чаще. Так же, хотя и не столь просто, объясняется и появление диагоналей, когда объектом является квадратная проволочная сетка.

Дифракция на экранирующей сетке происходит независимо от того, освещается ли объект посторонним светом или является самосветящимся. Поэтому и в случае самосвечения должны появляться такие же ложные структуры, как и при освещении. Это было теоретически предсказано Л. И. Мандельштамом (1879—1944) еще в 1911 г. Опыты с накаливаемыми сетками, поставленные самим Мандельштамом, подтвердили это предсказание.

## § 58. Телескоп без объектива. Получение изображений с помощью малых отверстий

1. В принципе можно построить телескоп без объектива сколь угодно высокой разрешающей способности. Роль объектива может играть круглое отверстие. Следующее рассуждение, принадлежащее Рэлею, разъясняет идею такого телескопа. Допустим сначала, что в отверстие вставлен объектив. Лучи, идущие от какой-либо точки объекта к ее изображению вдоль оптической оси и по периферии, имеют различные геометрические длины. При отсутствии объектива различны и их оптические длины. Объектив должен компенсировать своей толщиной различие оптических длин всех лучей, чтобы они приходили в точку-изображение в одинаковых фазах. Но небольшое расхождение в фазах лучей мало сказывается на результате их интерференции. Например, если интерферируют два одинаковых луча в одинаковых фазах, то результирующая интенсивность превосходит интенсивность отдельного луча в 4 раза. Если же разность фаз составляет  $\pi/4$ , то она будет

превосходить в  $2 + \sqrt{2} = 3,42$  раза, т. е. изменится незначительно. Поэтому разности фаз в  $\pi/4$  или меньше можно не принимать во внимание. Допустим теперь, что фокусное расстояние объектива увеличивается все больше и больше. Различие в геометрических длинах центрального и крайнего периферийного лучей будет становиться все меньше и меньше. Когда это различие достигнет примерно  $\lambda/8$ , надобность в объективе отпадет. Действительно, в этом случае максимальная разность фаз между лучами, приходящими в точку-изображение от различных точек плоскости отверстия, не будет превышать  $\pi/4$ , и компенсация различия оптических длин становится практически не нужной. Отверстие будет действовать как объектив телескопа. При увеличении фокусного расстояния  $f$  разрешающая способность объектива не меняется и все время определяется формулой (56.2). Она останется неизменной и в предельном случае, когда  $f = \infty$ , т. е. когда объектив совсем удален.

Разность геометрических длин крайнего периферийного и центрального лучей составляет  $D^2/(8l)$ , где  $D$  — диаметр отверстия, а  $l$  — длина телескопа, которую можно считать равной фокусному расстоянию. Для оценки  $l$  приравняем эту разность  $\lambda/8$  и получим

$$l = D^2/\lambda. \quad (58.1)$$

Эта формула показывает, что о практической реализации телескопа без объектива не может быть и речи ввиду колоссальных размеров, которые должен был бы иметь такой телескоп. Например, при  $D = 1$  м,  $\lambda = 500$  нм  $= 5 \cdot 10^{-7}$  м формула (58.1) дает  $l = 2 \cdot 10^6$  м  $= 2000$  км. При гигантских размерах телескоп обладал бы ничтожной светосилой:  $(D/f)^2 = \lambda/l = \lambda^2/l \approx 10^{-13}$ .

2. К идее безлинзового телескопа примыкает способ получения изображений и фотографирования при помощи камеры с малым отверстием (камеры-обскуры). Она отличается от безлинзового телескопа только масштабами и возможностью практического осуществления. Поэтому приводимые ниже рассуждения относятся не только к камере с малым отверстием, но дополняют и уточняют идею безлинзового телескопа.

При уменьшении размеров отверстия четкость изображения в камере сначала улучшается, а затем начинает ухудшаться из-за дифракции. Дифракция несущественна при больших отверстиях, а при малых отверстиях становится основным фактором, определяющим четкость изображения. Оптимальные размеры отверстия, при которых достигается наибольшая четкость, легко оценить с помощью следующих соображений. Пусть отверстие имеет форму круга радиуса  $R$ . Расстояние до фотографируемого объекта может считаться бесконечно большим по сравнению с глубиной камеры  $l$ . Если бы была применима геометрическая оптика, то светящаяся точка изобразилась бы кружком того же радиуса  $R$ . Из-за дифракции точка изобразится дифракционным кружком, радиус которого порядка  $\lambda l/R$ . Уменьшать размеры отверстия имеет смысл лишь до тех пор, пока дифракционные ошибки не превзойдут геометрические. Наилучшая четкость изображения достигается при таких размерах отверстия, когда эти ошибки примерно одинаковы, т. е. при выполнении условия  $\lambda l/R \approx R$ , или  $R \approx \sqrt{\lambda l}$ . Это значит, что размер отверстия должен быть порядка центральной френелевой зоны. Рэлей, более подробно исследовавший вопрос как теоретически, так и экспериментально, нашел для наилучшего радиуса отверстия:

$$R = 0,9 \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}, \quad (58.2)$$

где  $a$  и  $b$  — расстояния предмета и его изображения от отверстия,

### ЗАДАЧИ

1. При наблюдении в телескоп с нормальным увеличением освещенность изображения звезды на сетчатке глаза в  $\alpha = 10$  раз меньше освещенности дневного неба, рассматриваемого в тот же телескоп. Во сколько раз надо увеличить диаметр

объектива для того, чтобы освещенность изображения звезды на сетчатке стала в  $\beta = 10$  раз больше освещенности изображения неба, если вместе с объективом телескопа заменен и окуляр таким образом, что увеличение телескопа осталось нормальным?

О т в е т. В  $\sqrt{\alpha\beta} = 10$  раз.

2. В фокальной плоскости объектива телескопа помещена фотопластинка. Освещенность изображения звезды на фотопластинке в  $\alpha = 10$  раз меньше освещенности дневного неба. Во сколько раз надо увеличить диаметр объектива, чтобы освещенность изображения звезды на фотопластинке стала в  $\beta = 10$  раз больше освещенности изображения неба?

О т в е т. В  $\sqrt{\alpha\beta} = 10$  раз.

3. Ракету, удаляющуюся от Земли, фотографируют, помещая фотопленку в фокальной плоскости объектива астрономического телескопа. При диаметре объектива  $D_1 = 80$  мм дифракционное изображение ракеты становится неразличимым на фоне изображения неба, когда ракета находится на расстоянии  $l_1 = 2 \cdot 10^4$  км от Земли. На каком расстоянии от Земли  $l_2$  удастся заметить ракету на фотографии, полученной с помощью объектива с диаметром  $D_2 = 200$  мм при той же контрастной чувствительности пленки?

О т в е т.  $l_2 = l_1 D_2 / D_1 = 5 \cdot 10^4$  км.

4. Как изменится разрешающая способность объектива телескопа, если его центральную часть закрыть круглым экраном, диаметр которого мало отличается от диаметра самого объектива?

У к а з а н и е. При решении задачи круглые объектив и экран можно заменить квадратными.

О т в е т. Разрешающая способность увеличится приблизительно в два раза.

5. Производится фотографирование удаленных предметов с помощью объектива телескопа на фотопластинке, помещенной в его фокальной плоскости. Полученный снимок с помощью окуляра того же телескопа проектируется на удаленный экран. Каково должно быть угловое увеличение телескопа, чтобы при этом была использована полностью разрешающая способность объектива телескопа? Изображение на экране рассматривается с того места, где установлен проекционный аппарат.

О т в е т.  $N \geq D/d$ , где  $D$  — диаметр объектива, а  $d$  — зрачка глаза.

6. С какого расстояния  $r$  можно увидеть невооруженным глазом свет лазера, генерирующего в непрерывном режиме  $P = 10$  кВт на частоте  $\omega = 4 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup>, если для формирования луча используется параболическое зеркало с диаметром  $D = 5$  м? Глаз видит источник, если в зрачок диаметром  $d = 5$  мм попадает в  $1$  с  $n = 60$  квантов излучения, лежащего в зеленой части спектра.

О т в е т.  $r \approx \frac{Dd}{2} \sqrt{\frac{P}{hc\lambda n}} \approx 0,1$  светового года. ( $h$  — постоянная Планка.)

7. Излучение лазера непрерывного действия на волне  $\lambda = 500$  нм мощностью  $P = 1$  Вт направляется на спутник с помощью телескопа, диаметр объектива которого равен  $D = 30$  см. Свет, рассеянный спутником, улавливается другим таким же телескопом и фокусируется на фотоумножитель с пороговой чувствительностью  $P_{\text{пор}} = 10^{-14}$  Вт. При каких расстояниях  $l$  до спутника отраженный сигнал может быть обнаружен, если поверхность спутника равномерно рассеивает падающий на него свет (по закону Ламберта)? Диаметр спутника  $d = 20$  см.

О т в е т.  $l \lesssim \frac{D}{2} \sqrt[4]{\frac{Pd^2}{2P_{\text{пор}}\lambda^2}} \approx 250$  км.

8. В § 40 был описан способ Поля фотографирования предметов с помощью непрозрачного гладкого шара. Оценить минимальное угловое разрешаемое расстояние  $\delta\varphi$  при фотографировании удаленных предметов этим способом.

У к а з а н и е. Размер светлого кружка в центре геометрической тени от точечного источника можно оценить из условия, что первый дифракционный ми-

нимум получается, когда разность хода лучей от противоположных точек шара порядка длины волны.

О т в е т.  $\delta\varphi \approx \lambda/D$ .

9. Существующие радиотелескопы и радиоустановки, предназначенные для изучения радиоизлучения Солнца и Галактики, обладают малой разрешающей способностью из-за больших длин волн радиоизлучения.

1) Найти минимальное разрешаемое угловое расстояние  $\delta\varphi$  радиотелескопа с диаметром зеркала  $d = 50$  м для длин волн  $\lambda = 1$  мм и  $\lambda = 10$  см.

2) Для увеличения разрешающей способности предлагалось использовать дифракцию радиоволн от края Луны (см. задачу 2 к § 42). Оценить разрешающую способность этого метода для тех же волн в предположении, что край Луны действует как тонкий непрозрачный экран, ограниченный прямолинейным краем.

3) Оценить, каковы должны быть высоты  $h$  неровностей лунной поверхности, чтобы можно было пользоваться этим методом. Расстояние до Луны  $b = 380\,000$  км. О т в е т. 1)  $\delta\varphi \approx \lambda/d$ . При  $\lambda = 1$  м  $\delta\varphi \approx 1^\circ$ ; при  $\lambda = 10$  см  $\delta\varphi \approx 7''$ .

2)  $\delta\varphi \approx \sqrt{\lambda/b}$ . При  $\lambda = 1$  м  $\delta\varphi \approx 2'$ ; при  $\lambda = 10$  см  $\delta\varphi \approx 40''$ .

3)  $h \ll \sqrt{b\lambda}$ . При  $\lambda = 1$  м  $\sqrt{b\lambda} = 19,5$  км; при  $\lambda = 10$  см  $\sqrt{b\lambda} = 6,2$  км.

10. Один из принципиально возможных (но практически не осуществимых) способов повышения разрешающей способности радиоустановок для изучения радиоизлучения космических масс состоит в том, чтобы использовать дифракционный максимум интенсивности радиоизлучения, получающийся в центре геометрической тени Луны от точечного источника. Оценить разрешающую способность этого метода, найти минимальное угловое разрешаемое расстояние для тех же длин волн, что и в предыдущей задаче. Обсудить возможности использования рассматриваемого метода. Диаметр Луны  $D = 3470$  км.

О т в е т.  $\delta\varphi \approx \lambda/D$ . При  $\lambda = 1$  м  $\delta\varphi \approx 0,06''$ . При  $\lambda = 10$  см  $\delta\varphi \approx 0,006''$ .

Метод требует, чтобы источник радиоизлучения находился на прямой, соединяющей точку наблюдения с центром Луны. Кроме того, он предъявляет весьма жесткие требования к гладкости лунной поверхности и к отступлению формы Луны от сферической. Высота неровностей поверхности по всей границе лунного диска должна быть мала по сравнению с  $h = b\lambda/D$ . Разность наибольшего и наименьшего диаметров лунного диска также не должна превышать этой величины. При  $\lambda = 1$  м  $h \approx 100$  м; при  $\lambda = 10$  см  $h \approx 10$  м. Эти жесткие требования исключают возможность использования рассматриваемого метода по крайней мере для радиоволн с длиной волны  $\lambda < 100$  м.

11. С помощью объектива микроскопа получена микрофотография малого объекта (например, растительных клеток или бактерий) с линейным увеличением  $N$ . Тот же объектив был использован для проектирования полученной микрофотографии на удаленный экран. Каково должно быть минимальное значение увеличения  $N$ , чтобы полностью была использована разрешающая способность микроскопа? Диаметр апертурной диафрагмы объектива равен  $D$ , диаметр зрачка глаза  $d$ . Изображение на экране рассматривается с места нахождения объектива.

О т в е т.  $N \geq D/d$ .

12. Каково должно быть фокусное расстояние  $f_2$  окуляра микроскопа, чтобы была полностью использована разрешающая способность объектива? Числовая апертура объектива равна  $n \sin \alpha$ , фокусное расстояние объектива  $f_1$ , длина тубуса (трубы микроскопа)  $l$ . Длину тубуса можно считать равной расстоянию между объективом и плоскостью первого изображения (т. е. изображения, даваемого объективом).

О т в е т.  $f_2 \leq \frac{ld}{2f_1 n \sin \alpha}$ , где  $d$  — диаметр зрачка глаза.

13. С помощью объектива телескопа с диаметром  $D$  и фокусным расстоянием  $f$  производится фотографирование удаленных объектов на мелкозернистой пластинке, помещенной в фокальной плоскости объектива. Полученное изображение рассматривается в микроскоп с числовой апертурой  $n \sin \alpha$  и увеличением  $M$ . Каким условиям должны удовлетворять числовая апертура и увеличение микро-

скопа, чтобы полностью использовать разрешающую способность объектива телескопа?

О т в е т.  $n \sin \alpha \geq D/(2f)$ ,  $N \geq DL/(fd)$ , где  $L$  — расстояние ясного зрения,  $d$  — диаметр зрачка глаза.

14. Современные фотопластики способны разрешать до  $z = 10^4$  линий на сантиметр. Какую светосилу (т. е. отношение квадратов диаметра  $D$  и фокусного расстояния  $f$ ) должен иметь объектив фотоаппарата, чтобы полностью использовать разрешающую способность пленки?

О т в е т.  $(D/f)^2 \geq z^2 \lambda^2 \approx 0,25$ .

## § 59. Фазовый контраст

1. В зависимости от вида изучаемых объектов при работе микроскопа следует различать два предельных случая. Одни объекты, называемые *абсорбционными*, в различных местах обладают различной прозрачностью. Такие объекты в основном влияют на *амплитуду* проходящего света. Другие объекты, называемые *рефракционными*, практически не поглощают света. Имея в различных местах различные толщины и показатели преломления, они влияют не на интенсивность, а на *фазу* проходящего света. Типичными примерами абсорбционного и рефракционного объектов могут служить амплитудная и фазовая дифракционные решетки.

Абсорбционные объекты дают *контрастные изображения* с хорошо выраженными границами между темными и светлыми частями. На них можно обнаружить все детали, которые способен разрешить микроскоп при заданной разрешающей способности. Напротив, изображения рефракционных объектов почти *лишены контраста*. В таких изображениях трудно, а часто и практически невозможно разрешить детали изучаемого объекта, хотя бы разрешающей способности микроскопа и было достаточно для этой цели. Причина такого различия между абсорбционными и рефракционными структурами состоит в том, что объектив микроскопа воспроизводит в плоскости изображения, а следовательно и на сетчатке глаза, то же распределение интенсивности светового поля, которое существует в плоскости объекта, а светочувствительные нервные окончания сетчатки реагируют именно на *интенсивность* световой волны, а не на ее фазу.

С рефракционными объектами постоянно приходится иметь дело в биологии при изучении хотя бы микроорганизмов. Биологические объекты в подавляющем большинстве случаев практически совершенно прозрачны в видимой области спектра. Отсутствие контраста в изображении затрудняет изучение таких объектов. Поэтому проблема контрастности изображения стоит в биологии особенно остро. Один из методов ее решения состоит в превращении рефракционных объектов в абсорбционные путем дифференциального окрашивания объекта. Однако такой метод не всегда возможен. Кроме того, он убивает живые организмы или по крайней мере нарушает их нормальную жизнедеятельность. Единственный метод изучения биологических объектов в естественных условиях состоит в том, чтобы воздействовать не на самый объект, а на *его изображение*. Это достигается в *методе фазового контраста*, предложенном Цернике (1888—1966) в 1934 г.

2. Идею метода фазового контраста проще всего выяснить на примере периодической структуры — одномерной дифракционной решетки. Различие между амплитудной и фазовой решетками с интересующей нас точки зрения по существу уже было выяснено в § 53. Остановимся на этом вопросе более подробно.

Отвлекаясь от поляризации, будем рассматривать свет как скалярное волновое поле и представлять световые колебания векторами на векторной диаграмме. Пусть свет падает нормально на поверхность решетки. Допустим сначала, что решетка амплитудная и состоит из чередующихся участков различной прозрачности, причем на участках *I* прозрачность больше, а на участках *II* — меньше. Для простоты (это несущественно для выяснения существа вопроса) предположим, что участки *I* и *II* имеют одинаковую ширину. Колебание на выходе участка *I* изобразится более длинной стрелкой *a*, чем колебание на выходе участка *II*, представляемое стрелкой *b* (рис. 222). Так как амплитудная решетка не вносит