Отсюда, ввиду произвольности области интегрирования,

$$\dot{D}_n^{(1)} = \dot{D}_n^{(2)}, \quad \dot{B}_n^{(1)} = \dot{B}_n^{(2)}. \tag{63.5}$$

Таким образом, граничные условия (63.5), как видно из их вывода, являются следствиями граничных условий (63.1) и уравнений Максвелла для циркуляций векторов E и H. В случае монохроматического поля $\dot{D} = i\omega D$, $\dot{B} = i\omega B$, так что условия (63.5) переходят в (63.2). Отсюда следует, что для монохроматических полей граничные условия (63.2) выполняются автоматически, если только выполняются условия (63.1). Поэтому в дальнейшем можно пользоваться только условиями (63.1), не заботясь о выполнении условий (63.2).

Если условия (63.1) записать в координатной форме, то получатся четыре уравнения, так как каждый из векторов E или H можно разложить на две тангенциальные и одну нормальную составляющие. Таким образом, электродинамика приводит к *четырем независимым граничным условиям.*

В старых теориях упругого эфира число независимых граничных условий было *шесть*: равенство трех составляющих смещений и трех составляющих сил упругих напряжений по обе стороны границы раздела. Чтобы удовлетворить этим шести граничным условиям, вообще говоря, необходимо, чтобы кроме поперечных волн существовали также и *продольные*. Но опыт говорил против существования продольных волн. Возникшую трудность теория пыталась устранить, наделяя эфир такими свойствами, чтобы продольные волны в нем никогда не возникали (несжимаемый или бесконечно сжимаемый эфир). Однако удовлетворительного решения проблемы таким путем получено не было. Электромагнитная теория не знает этой трудности, поскольку число независимых граничных условий в ней равно четырем. Им можно удовлетворить с помощью двух поперечных составляющих отраженной и двух поперечных составляющих преломленной волн.

§ 64. Геометрические законы отражения и преломления волн

1. Необходимость отражения и преломления света на границе раздела двух сред следует уже из граничных условий. Действительно, как будет видно из дальнейшего, граничные условия могут быть удовлетворены, вообще говоря, лишь при наличии отраженной и преломленной волн. Будем обозначать падающую волну значком e (entfallende), отраженную — значком r (reflektierte), проходящую — значком d (durchgehende).

Пусть на плоскую неподвижную границу раздела падает плоская монохроматическая волна

$$E^{(e)} = \vec{\mathscr{E}} e^{i(\omega t - k_1 r)}. \tag{64.1}$$

Из соображений симметрии следует, что отраженная и прошедшая волны

$$\mathbf{E}^{(r)} = \mathbf{R}e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1'\mathbf{r})}, \tag{64.2}$$

$$\mathbf{E}^{(d)} = \mathbf{D}e^{i(\omega t - \mathbf{k}_2\mathbf{r})} \tag{64.3}$$

будут также плоскими и притом той же частоты ω. Равенство частот следует из линейности и однородности граничных условий. Если среды неподвижны, то коэффициенты при напряженностях полей в граничных условиях могут зависеть от координат, но не от времени. Пусть ω_r и ω_d — частоты отраженной и прошедшей волн. Тогда любое из граничных условий (63.1) принимает вид

$$A(\mathbf{r})\,e^{i\omega t} + B(\mathbf{r})\,e^{i\omega_r t} + C(\mathbf{r})\,e^{i\omega_d t} = 0.$$

Коэффициенты $A(\mathbf{r})$, $B(\mathbf{r})$, $C(\mathbf{r})$ отличны от нуля, если только отраженная и прошедшая волны действительно существуют. Следовательно, функции $e^{i\omega t}$, $e^{i\omega_r t}$, $e^{i\omega_d t}$ линейно зависимы, а это возможно лишь при $\omega = \omega_r = \omega_d$. Если граница движется, то A, B и C зависят не только от $\mathbf{r}$, но и от времени. Тогда имеет место изменение частоты (эффект Допплера). В этой главе всюду предполагается, что среды неподвижны.

2. Найдем теперь волновые векторы отраженной и прошедшей волн. Формулы, определяющие эти векторы, называются *геометрическими законами отражения и преломления волн*. Они определяют *направления распространения отраженной и прошедшей волн*, а в случае их неоднородности также и *затухание в пространстве*.

Примем границу раздела сред за координатную плоскость XY. За ось X возьмем линию пересечения плоскости раздела сред с плоскостью падения. Ось Z направим вниз, т. е. в сторону второй среды. Тогда ось Y окажется перпендикулярной к плоскости падения и будет лежать в плоскости раздела сред. Так как по доказанному частоты падающей, отраженной и прошедшей волн одинаковы, то любое из граничных условий (63.1) примет вид

$$Ae^{-i(k_{1x}x + k_{1y}y)} + Be^{-i(k'_{1x}x + k'_{1y}y)} + Ce^{-i(k_{2x}x + k_{2y}y)} = 0,$$

где A, B, C — постоянные и притом отличные от нуля, если только отраженная и прошедшая волны действительно существуют. Полагая $y = 0$, получаем линейную зависимость между функциями $e^{-ik_{1x}x}$, $e^{-ik'_{1x}x}$, $e^{-ik_{2x}x}$ и поэтому заключаем, что

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}. \tag{64.4}$$

Аналогично,

$$k_{1y} = k'_{1y} = k_{2y}. \tag{64.5}$$

Таким образом, тангенциальные составляющие волновых векторов отраженной и прошедшей волн равны тангенциальной составляющей волнового вектора падающей волны. Остается найти нормальные составляющие этих векторов. Согласно соотношению (5.14),

$$k_1'^2 = k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1, \tag{64.6}$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2, \tag{64.7}$$

где ε_1 и ε_2 — диэлектрические проницаемости первой и второй сред. Далее

$$k'_{1z} = -\sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2}, \tag{64.8}$$

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2}. \tag{64.9}$$

Знак минус перед корнем в формуле (64.8) взят потому, что плюс соответствует падающей волне. Что касается знака перед корнем в (64.9), то он будет определен в дальнейшем из физических соображений.

Если падающая волна однородна, то из (64.4), (64.5) и (64.8) следует, что отраженная волна также однородна. Ее волновая нормаль лежит в плоскости падения, а угол отражения равен углу падения. Для проходящей волны надо различать два случая.

П е р в ы й с л у ч а й. $k_2^2 > k_{1x}^2$, т. е. преломленная волна однородна. Определим, какой знак следует выбрать в этом случае перед квадратным корнем в (64.9). Знаку плюс соответствует волна, распространяющаяся от границы раздела, — направление ее распространения обозначено на рис. 238 сплошной стрелкой. Знаку минус соответствует волна, идущая к границе раздела, — ее направление обозначено пунктирной стрелкой. Эти стрелки указывают направления распространения волновых фронтов, т. е. плоскостей равных фаз. Ясно, что отраженная и преломленная волны должны быть *уходящими* от границы раздела. Этим требованием обеспечивается однозначность решения задачи. Однако требование ухода относится не к фазе, а к энергии волны. Можно показать, что в случае электромагнитных волн в изотропных средах направления распространения фазы и энергии волны совпадают. Поэтому знак минус перед корнем в (64.9) следует отбросить; условиям задачи удовлетворяет только знак плюс.

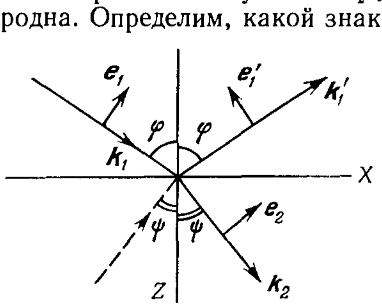

Рис. 238.

Как видно из (64.4), нормали к падающей и преломленной волнам лежат в плоскости падения. Если φ — угол падения, а ψ — угол преломления, то

$$k_{1x}=k_1\sin\varphi=\frac{\omega}{v_1}\sin\varphi,\quad k_{2x}=k_2\sin\psi=\frac{\omega}{v_2}\sin\psi,$$

откуда на основании (64.4)

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \tag{64.10}$$

Второй случай. $k_2^2<k_{1x}^2$, или $\omega^2/v_2^2<\omega^2\sin^2\varphi/v_1^2$, откуда $\sin\varphi>v_1/v_2=n$. Здесь n — относительный показатель преломления второй среды относительно первой. Так как $\sin\varphi<1$, то рассматриваемый случай возможен только при $n<1$. Составляющая k_{2z} чисто мнимая, а волна во второй среде, если она существует, неоднородная. Знак корня в (64.9) определится из требования, чтобы при удалении от границы раздела амплитуда волны затухала. Этому требованию удовлетворяет только выражение

$$k_{2z}=-i\sqrt{k_{1x}^2-k_2^2}=-\frac{i}{2h}. \tag{64.11}$$

В самом деле, тогда (64.3) принимает вид

$$\boldsymbol{E}^{(d)}=\boldsymbol{D}e^{-z/2h}e^{i(\omega t-k_{1x}x)}, \tag{64.12}$$

т. е. волна во второй среде будет затухать в направлении оси Z, чего не получилось бы, если бы в (64.11) вместо минуса взять плюс.

Плоскости равных фаз волны (64.12) перпендикулярны к оси X и распространяются вдоль нее с фазовой скоростью $v_x=\omega/k_{1x}$. Плоскости равных амплитуд параллельны границе раздела. При смещении вглубь среды на h интенсивность волны (пропорциональная квадрату амплитуды) убывает в e раз. Величина h называется *глубиной проникновения* волны во вторую среду. Она равна

$$h=\frac{1}{\sqrt{k_{1x}^2-k_2^2}}=\frac{\lambda_1}{4\pi\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}}, \tag{64.13}$$

где λ_1 — длина волны в первой среде.

Из (64.12) видно, что на больших (по сравнению с глубиной проникновения) расстояниях от границы раздела волна во второй среде практически полностью затухает. А так как поглощения света нет, то энергия падающей волны, проникшая во вторую среду, должна снова целиком возвратиться в первую среду. Иными словами, при $\sin\varphi>n$ отражение света должно быть *полным*. Угол φ_0, определяемый соотношением $\sin\varphi_0=n$, называется *предельным углом полного отражения*.

3. В случае обыкновенного отражения

$$\begin{aligned}\sin\varphi&=k_{1x}/k_1,\quad \cos\varphi=k_{1z}/k_1,\\ \sin\psi&=k_{2x}/k_2,\quad \cos\psi=k_{2z}/k_2.\end{aligned} \tag{64.14}$$

В случае полного отражения не существует вещественного угла ψ, удовлетворяющего соотношениям (64.14), так как они дают для $\sin\psi$ значения, превосходящие единицу, а для $\cos\psi$ — мнимые значения. Однако в целях сохранения единой формы записи при обыкновенном и полном отражениях целесообразно сохранить формулы (64.14) как простые определения $\sin\psi$ и $\cos\psi$. Поскольку эти величины удовлетворяют соотношению $\sin^2\psi+\cos^2\psi=1$, они могут рассматриваться как синус и косинус комплексного аргумента ψ в смысле теории функций комплексного переменного:

$$\sin\psi=\frac{e^{i\psi}-e^{-i\psi}}{2i},\quad \cos\psi=\frac{e^{i\psi}+e^{-i\psi}}{2}.$$

Если $\sin\psi$ и $\cos\psi$ известны, то этими формулами аргумент ψ определяется с точностью до целого кратного от 2π. Это не может сказаться на однозначности физических выводов, так как во все формулы будет входить не сам комплексный угол ψ, а его синус и косинус. К так определенным функциям $\sin\psi$ и $\cos\psi$ применимы все формальные соотношения обычной тригонометрии. Поэтому над комплексными $\sin\psi$ и $\cos\psi$ можно выполнять все преобразования, как если бы они были обыкновенными синусом и косинусом.

Заметим, наконец, что вместо (64.14) можно написать

$$\sin\psi=\sin\varphi/n,\quad \cos\psi=-\frac{i}{n}\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}. \tag{64.15}$$

§ 65. Формулы Френеля

1. При выводе геометрических законов отражения и преломления волн явный вид граничных условий не использовался. Для определения амплитуд отраженной и проходящей волн необходимо использовать граничные условия *в явном виде*.

Разложим электрическое поле каждой волны на две составляющие. Одна из них лежит в плоскости падения, другая перпендикулярна к этой плоскости. Часто эти составляющие называют *главными составляющими* соответствующих волн. Они обозначаются значками $\parallel$ и $\perp$ соответственно. Пусть $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ — единичные векторы вдоль координатных осей, а $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2$ — единичные векторы, лежащие в плоскости падения и перпендикулярные соответственно к падающему, отраженному и преломленному лучам (рис. 238). Тогда

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{[\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{k}_1]}{k_1},\quad \boldsymbol{e}_1'=\frac{[\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{k}_1']}{k_1},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{[\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{k}_2]}{k_2}. \tag{65.1}$$

В случае полного отражения вектор $\boldsymbol{e}_2$ комплексный, его геометрическая интерпретация как единичного вектора, перпендикулярного к преломленному лучу, теряет смысл. Поэтому, чтобы охватить не только обыкновенное, но и полное отражение, дальней-