

В случае полного отражения не существует вещественного угла ψ , удовлетворяющего соотношениям (64.14), так как они дают для $\sin \psi$ значения, превосходящие единицу, а для $\cos \psi$ — мнимые значения. Однако в целях сохранения единой формы записи при обыкновенном и полном отражениях целесообразно сохранить формулы (64.14) как простые определения $\sin \psi$ и $\cos \psi$. Поскольку эти величины удовлетворяют соотношению $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$, они могут рассматриваться как синус и косинус комплексного аргумента ψ в смысле теории функций комплексного переменного:

$$\sin \psi = \frac{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}{2i}, \quad \cos \psi = \frac{e^{i\psi} + e^{-i\psi}}{2}.$$

Если $\sin \psi$ и $\cos \psi$ известны, то этими формулами аргумент ψ определяется с точностью до целого кратного от 2π . Это не может сказаться на однозначности физических выводов, так как во все формулы будет входить не сам комплексный угол ψ , а его синус и косинус. К так определенным функциям $\sin \psi$ и $\cos \psi$ применимы все формальные соотношения обычной тригонометрии. Поэтому над комплексными $\sin \psi$ и $\cos \psi$ можно выполнять все преобразования, как если бы они были обыкновенными синусом и косинусом.

Заметим, наконец, что вместо (64.14) можно написать

$$\sin \psi = \sin \varphi/n, \quad \cos \psi = -\frac{i}{n} \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}. \quad (64.15)$$

§ 65. Формулы Френеля

1. При выводе геометрических законов отражения и преломления волн явный вид граничных условий не использовался. Для определения амплитуд отраженной и проходящей волн необходимо использовать граничные условия *в явном виде*.

Разложим электрическое поле каждой волны на две составляющие. Одна из них лежит в плоскости падения, другая перпендикулярна к этой плоскости. Часто эти составляющие называют *главными составляющими* соответствующих волн. Они обозначаются значками \parallel и \perp соответственно. Пусть e_x, e_y, e_z — единичные векторы вдоль координатных осей, а e_1, e'_1, e_2 — единичные векторы, лежащие в плоскости падения и перпендикулярные соответственно к падающему, отраженному и преломленному лучам (рис. 238). Тогда

$$e_1 = \frac{[e_y k_1]}{k_1}, \quad e'_1 = \frac{[e_y k'_1]}{k_1}, \quad e_2 = \frac{[e_y k_2]}{k_2}. \quad (65.1)$$

В случае полного отражения вектор e_2 комплексный, его геометрическая интерпретация как единичного вектора, перпендикулярного к преломленному лучу, теряет смысл. Поэтому, чтобы охватить не только обыкновенное, но и полное отражение, дальней-

шие вычисления проводятся чисто аналитически, не прибегая к чертежу. Введем разложения

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} &= \mathcal{E}_\perp \mathbf{e}_y + \mathcal{E}_\parallel \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{R} &= R_\perp \mathbf{e}_y + R_\parallel \mathbf{e}'_1, \\ \mathbf{D} &= D_\perp \mathbf{e}_y + D_\parallel \mathbf{e}_2\end{aligned}\quad (65.2)$$

и определим амплитуды R_\perp , R_\parallel , D_\perp , D_\parallel . Умножая скалярно первое из уравнений (65.2) на \mathbf{e}_x , находим

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_\parallel (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_x) = \frac{\mathcal{E}_\parallel}{k_1} (\mathbf{e}_x [\mathbf{e}_y \mathbf{k}_1]) = \frac{\mathcal{E}_\parallel}{k_1} ([\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y] \mathbf{k}_1) = \frac{\mathcal{E}_\parallel}{k_1} (\mathbf{e}_z \mathbf{k}_1) = \mathcal{E}_\parallel \cos \varphi.$$

Аналогично, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_\perp$, $\mathcal{E}_z = -\mathcal{E}_\parallel \sin \varphi$. Таким образом, x -, y -, z -составляющие электрического поля на границе раздела сред (т. е. при $z = 0$) будут

$$E_x^{(e)} = \cos \varphi \cdot \mathcal{E}_\parallel, \quad E_y^{(e)} = \mathcal{E}_\perp, \quad E_z^{(e)} = -\sin \varphi \cdot \mathcal{E}_\parallel. \quad (65.3)$$

При этом мы всюду опустили фазовые множители, так как в любой точке границы раздела они одинаковы для всех трех волн: падающей, отраженной и прошедшей. Магнитные свойства сред учитывать не будем, считая, что $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B}$. Магнитное поле вычисляем по формуле (5.6) и находим

$$H_x^{(e)} = -n_1 \cos \varphi \cdot \mathcal{E}_\perp, \quad H_y^{(e)} = n_1 \mathcal{E}_\parallel, \quad H_z^{(e)} = n_1 \sin \varphi \cdot \mathcal{E}_\perp. \quad (65.3a)$$

Для отраженной волны:

$$\begin{aligned}E_x^{(r)} &= -\cos \varphi \cdot R_\parallel, & E_y^{(r)} &= R_\perp, & E_z^{(r)} &= -\sin \varphi \cdot R_\parallel, \\ H_x^{(r)} &= n_1 \cos \varphi \cdot R_\perp, & H_y^{(r)} &= n_1 R_\parallel, & H_z^{(r)} &= n_1 \sin \varphi \cdot R_\perp.\end{aligned}\quad (65.4)$$

Для прошедшей волны:

$$\begin{aligned}E_x^{(d)} &= \cos \psi \cdot D_\parallel, & E_y^{(d)} &= D_\perp, & E_z^{(d)} &= -\sin \psi \cdot D_\parallel, \\ H_x^{(d)} &= -n_2 \cos \psi \cdot D_\perp, & H_y^{(d)} &= n_2 D_\parallel, & H_z^{(d)} &= D_\parallel n_2 \sin \psi.\end{aligned}\quad (65.5)$$

Для определения четырех неизвестных R_\perp , R_\parallel , D_\perp , D_\parallel электродинамика дает четыре независимых граничных условия:

$$\begin{aligned}E_x^{(e)} + E_x^{(r)} &= E_x^{(d)}, & E_y^{(e)} + E_y^{(r)} &= E_y^{(d)}, \\ H_x^{(e)} + H_x^{(r)} &= H_x^{(d)}, & H_y^{(e)} + H_y^{(r)} &= H_y^{(d)}.\end{aligned}\quad (65.6)$$

Подставляя в них найденные выше значения, получим

$$\begin{aligned}\cos \varphi (\mathcal{E}_\parallel - R_\parallel) &= \cos \psi \cdot D_\parallel, & \mathcal{E}_\perp + R_\perp &= D_\perp, \\ n_1 \cos \varphi (\mathcal{E}_\perp - R_\perp) &= n_2 \cos \psi \cdot D_\perp, & n_1 (\mathcal{E}_\parallel + R_\parallel) &= n_2 D_\parallel.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} r_{\perp} \equiv \frac{R_{\perp}}{\mathcal{E}_{\perp}} &= \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \psi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi}, & d_{\perp} \equiv \frac{D_{\perp}}{\mathcal{E}_{\perp}} &= \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi}, \\ r_{\parallel} \equiv \frac{R_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} &= \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \psi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \psi}, & d_{\parallel} \equiv \frac{D_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} &= \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \psi}. \end{aligned} \quad (65.7)$$

Отношения $R_{\perp}/\mathcal{E}_{\perp}$, $D_{\perp}/\mathcal{E}_{\perp}$, ... называются *коэффициентами Френеля*. С помощью соотношений (64.10) формулы (65.7) легко привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{R_{\perp}}{\mathcal{E}_{\perp}} &= -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}, & \frac{D_{\perp}}{\mathcal{E}_{\perp}} &= \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}, \\ \frac{R_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} &= \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}, & \frac{D_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} &= \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}. \end{aligned} \quad (65.8)$$

Эти формулы и решают поставленную задачу. Они были впервые получены в 1821 г. Френелем из механической теории упругого эфира с помощью весьма простых, но нестрогих и противоречивых рассуждений. Последующие попытки строгого решения задачи с помощью уравнений упругости ухудшили дело: в случае волн, поляризованных в плоскости падения, они приводили к формулам, не согласующимся с опытом. Только электромагнитная теория света впервые дала строгое и удовлетворительное решение задачи.

2. При обыкновенном отражении угол ψ , а с ним и все коэффициенты Френеля *вещественны*. Отсюда следует, что отражение и преломление *не сопровождаются изменением фаз*, за исключением, быть может, изменения фазы отраженной волны на 180° . *Если падающая волна была линейно поляризована, то отраженная и преломленная волны будут также линейно поляризованы.*

При нормальном падении формулы (65.7) дают

$$\frac{R_{\perp}}{\mathcal{E}_{\perp}} = -\frac{R_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \quad (65.9)$$

В этом случае исчезает разница между волнами, поляризованными в плоскости падения и перпендикулярно к ней. Различие в знаках коэффициентов Френеля $R_{\perp}/\mathcal{E}_{\perp}$ и $R_{\parallel}/\mathcal{E}_{\parallel}$ связано с условным выбором положительных направлений, в которых проведены векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}'_1 : в предельном случае нормального падения эти векторы направлены прямо противоположно (рис. 238). Если $n_1 < n_2$, то $R_{\perp}/\mathcal{E}_{\perp} < 0$; если $n_1 > n_2$, то $R_{\perp}/\mathcal{E}_{\perp} > 0$. *В первом случае отражение света сопровождается скачкообразным изменением фазы на 180° . Во втором оно происходит без изменения фазы.*

При скользющем падении, когда угол φ близок к 90° ,

$$\frac{R_{\perp}}{\mathcal{E}_{\perp}} = \frac{R_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} \rightarrow -1,$$

т. е. отражение практически полное. С этим связано происхождение ярких и красивых изображений противоположных берегов в спокойных водоемах. Этим же объясняется, почему изображение заходящего солнца в тех же условиях по яркости почти не уступает самому солнцу.

Как видно из формул (65.7) или (65.8), отношение R_{\perp}/E_{\perp} никогда не обращается в нуль, за исключением тривиального случая $n_1 = n_2$. Напротив, при $\varphi + \psi = \pi/2$ знаменатель $\operatorname{tg}(\varphi + \psi)$ обращается в бесконечность. В этом случае $R_{\parallel} = 0$, т. е. отражение отсутствует. Таким образом, если электрический вектор падающей волны лежит в плоскости падения, то при некотором угле падения отражение света исчезает. В этом состоит закон Брюстера (1781—1868), открытый им экспериментально в 1815 г. Соответствующий угол падения φ_B называется *углом Брюстера*. Для его вычисления заметим, что при $\varphi + \psi = \pi/2$ направления прошедшего и отраженного лучей взаимно перпендикулярны (рис. 239). Следовательно, $\cos \varphi_B = \sin \psi_B = \frac{1}{n} \sin \varphi_B$, т. е.

$$\operatorname{tg} \varphi_B = n. \quad (65.10)$$

Если неполяризованный свет падает под углом Брюстера, то составляющая с электрическим вектором E_{\parallel} отражаться не будет. Отраженный свет окажется линейно поляризованным и притом перпендикулярно к плоскости падения¹⁾.

Отражение под углом Брюстера дает простейший способ получения поляризованного света. Недостаток этого способа — малая интенсивность отраженного света. Для его устранения применяют несколько стеклянных пластинок, сложенных в стопу (стопу Столетова). При большом числе пластинок отражается почти половина падающего света. Если свет падает под углом Брюстера, то отраженный свет оказывается полностью поляризованным перпендикулярно к плоскости падения. Прошедший свет поляризован в плоскости падения, но эта поляризация не совсем полная. В настоящее время стопа для получения поляризованного света почти не употребляется, так как существуют более удобные и совершенные способы (*поляризационные призмы, поляроиды*).

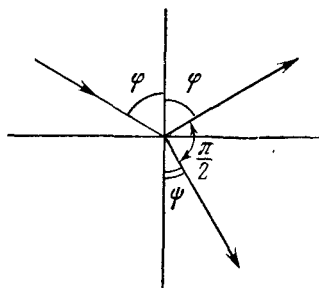


Рис. 239.

¹⁾ Малюс, открывший поляризацию света при отражении, назвал плоскость падения плоскостью поляризации отраженного света. В настоящем руководстве под *плоскостью поляризации* понимается плоскость, перпендикулярная к плоскости поляризации Малюса,

3. Отношение отраженной энергии к энергии падающей называется *коэффициентом отражения*. Так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды, то формулы (65.7) дают для коэффициентов отражения главных составляющих падающей волны следующие выражения:

$$\rho_{\perp} = \left(\frac{\cos \varphi - n \cos \psi}{\cos \varphi + n \cos \psi} \right)^2, \quad \rho_{\parallel} = \left(\frac{n \cos \varphi - \cos \psi}{n \cos \varphi + \cos \psi} \right)^2. \quad (65.11)$$

Коэффициент отражения при нормальном падении R называется *отражательной способностью*:

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2. \quad (65.12)$$

Для стекла ($n = 1,5$) $R = 0,04 = 4\%$; для воды ($n = 1,33$) $R = 2\%$. При отражении от воды длинных электромагнитных волн ($n = \sqrt{\epsilon} = 9$) $R = 64\%$. Эти цифры показывают, что ни вода, ни стекло при нормальном падении не могут служить зеркалом. Обычные зеркала используют отражение света от металлических поверхностей. Стекло служит только для защиты их задних посеребренных поверхностей. Однако наличие даже слабого отражения от передней стороны стекла делает такие посеребренные с задней стороны зеркала непригодными для оптических целей. Для этих целей необходимо покрывать металлом (лучше всего родием) переднюю поверхность стекла.

Отношение b прошедшей энергии к энергии падающей называется *коэффициентом пропускания*. Коэффициент пропускания можно также определить как отношение нормальных компонент усредненного по времени вектора Пойнтинга прошедшей и падающей волн. На основании (65.3) и (65.3а) находим для падающей волны

$$\begin{aligned} S_z^{(e)} &= \frac{c}{16\pi} [E_x^{(e)} H_y^{*(e)} - E_y^{(e)} H_x^{*(e)}] + \text{компл. сопр.} = \\ &= \frac{cn_1}{8\pi} \cos \varphi (|\mathcal{E}_{\perp}|^2 + |\mathcal{E}_{\parallel}|^2), \end{aligned}$$

а для прошедшей

$$S_z^{(d)} = \frac{cn_2}{8\pi} \cos \psi (|D_{\perp}|^2 + |D_{\parallel}|^2).$$

Предполагая сначала, что вектор \mathbf{E} перпендикулярен к плоскости падения, а затем параллелен ей, находим

$$b_{\perp} = \frac{n \cos \psi}{\cos \varphi} \left(\frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + n \cos \psi} \right)^2, \quad b_{\parallel} = \frac{n \cos \psi}{\cos \varphi} \left(\frac{2 \cos \varphi}{n \cos \varphi + \cos \psi} \right)^2. \quad (65.13)$$

Нетрудно проверить, что $\rho_{\perp} + b_{\perp} = \rho_{\parallel} + b_{\parallel} = 1$, как и должно быть согласно закону сохранения энергии.

Коэффициент пропускания при нормальном падении

$$B = \frac{4n}{(n+1)^2} \quad (65.14)$$

называется *поверхностной прозрачностью*. Измерения отражательной способности и поверхностной прозрачности дают удобный метод измерения показателей преломления в инфракрасной части спектра.

Найдем теперь коэффициент отражения для случая, когда плоскость поляризации падающей волны составляет с плоскостью падения угол α . Этот угол называется *азимутом поляризации* падающей волны. Очевидно, $\mathcal{E}_{\parallel} = A \cos \alpha$, $\mathcal{E}_{\perp} = A \sin \alpha$, где A — амплитуда падающей волны. Полная отраженная энергия пропорциональна $\rho_{\parallel} \mathcal{E}_{\parallel}^2 + \rho_{\perp} \mathcal{E}_{\perp}^2 = A^2 (\rho_{\parallel} \cos^2 \alpha + \rho_{\perp} \sin^2 \alpha)$. Следовательно, коэффициент отражения равен

$$\rho_{\alpha} = \rho_{\parallel} \cos^2 \alpha + \rho_{\perp} \sin^2 \alpha. \quad (65.15)$$

Коэффициент отражения неполяризованного света ρ получается отсюда путем усреднения по α . Так как в неполяризованном свете

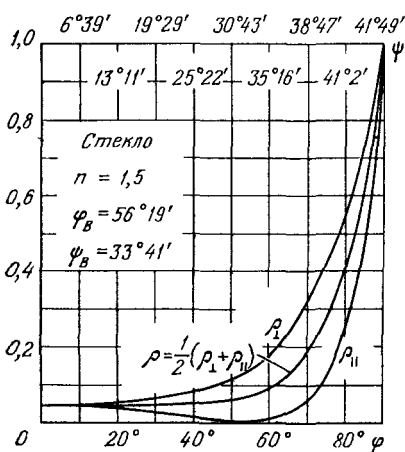


Рис. 240.

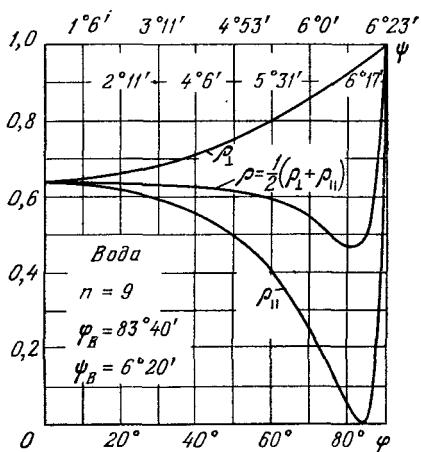


Рис. 241.

все направления электрического (и магнитного) вектора представлены с одинаковой вероятностью, то $\overline{\cos^2 \alpha} = \overline{\sin^2 \alpha} = 1/2$. Поэтому

$$\rho = \frac{1}{2} (\rho_{\parallel} + \rho_{\perp}). \quad (65.16)$$

На рис. 240 приведены теоретические кривые для коэффициентов отражения видимого света от стекла ($n = 1,5$), а на рис. 241 —

для радиоволн при их отражении от поверхности воды ($n = \sqrt{\epsilon_0} = 9$).

Многочисленные измерения коэффициентов отражения при различных углах падения и при различных поляризациях падающей волны, предпринимавшиеся с целью проверки формул Френеля, находятся в очень хорошем согласии с этими формулами как в случае видимого света, так и в случае радиоволн. Исключение составляет случай отражения под углом Брюстера и в его ближайшей окрестности, где наблюдаются незначительные отступления от формул Френеля (см. § 70).

4. Формулы Френеля мы вывели в предположении, что свет *монохроматический*. Однако в случае обыкновенного отражений в эти формулы не входит длина волны, а отражение не сопровождается изменением фазы. Поэтому в случае недиспергирующих сред и обыкновенного отражения формулы Френеля справедливы и для *немонохроматических волн*. Надо только под \mathcal{E}_\perp , R_\perp , D_\perp и т. д. понимать соответствующие компоненты напряженностей электрического поля падающей, отраженной и прошедшей волн *на границе раздела*. Это непосредственно следует из теоремы Фурье и принципа суперпозиции.

§ 66. Полное отражение

1. В этом случае $\cos \psi$ — чисто мнимая величина. Формулы Френеля удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{R_\perp}{\mathcal{E}_\perp} &= \frac{\cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}, & \frac{D_\perp}{\mathcal{E}_\perp} &= \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}, \\ \frac{R_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel} &= \frac{n^2 \cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{n^2 \cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}, & \frac{D_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel} &= \frac{2n \cos \varphi}{n^2 \cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}. \end{aligned} \quad (66.1)$$

Из них видно, что $|R_\perp| = |\mathcal{E}_\perp|$ и $|R_\parallel| = |\mathcal{E}_\parallel|$, т. е. отражение действительно является «полным». В то же время неоднородная волна во второй среде, вообще говоря, не исчезает. Например, если $\varphi = \varphi_0 = \arcsin n$, то $D_\perp = 2\mathcal{E}_\perp$. Здесь нет нарушения закона сохранения энергии. Дело в том, что формулы Френеля относятся к *монохроматическому полю*, т. е. к некоторому *установившемуся процессу*. А в этом случае закон сохранения энергии требует только, чтобы количество энергии во второй среде менялось во времени *периодически*. Иными словами, *среднее за период изменение энергии во второй среде должно быть равно нулю*. Что это условие действительно выполняется, показывает следующее простое вычисление.

Вычислим усредненную по времени нормальную составляющую вектора Пойнтинга во второй среде. Пусть электрический вектор